MATRIZES FUNDAMENTAIS E EXPONENCIAL DE MATRIZES

1. Matrizes fundamentais

Consideremos o sistema (não necessariamente de coeficientes constantes):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{1}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \ddots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Como vimos, se $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$ é um conjunto L.I. de soluções do sistema (1), então a solução geral de (1) é dada por

Date: October 21, 2020.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots c_n x_{nn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

A última equação pode ser reconhecida como o produto de uma matriz $n \times n$ por outra $n \times 1$. Em outras palavaras, a solução geral pode ser escrita como um produto: $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, sendo $\mathbf{C}$ uma matriz coluna de n constantes arbitrárias $c_1, c_2, \cdots, c_n$ e $\Phi(t)$ a matriz $n \times n$ cujas colunas são as entradas dos vetores solução do sistema (1):

$$
\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.
$$

Definição 1. *A matriz $\Phi(t)$ acima é denominada uma **matriz fundamental** do sistema 1.*

Valem as seguintes propriedades:

Proposição 2.

- *Uma matriz fundamental é não singular para todo t no seu intervalo de definição.*

- *Uma matriz fundamental* $\Phi(t)$ *do sistema 1, satisfaz a equação matricial:*
$$\dot{\Phi}\ ' = \boldsymbol{A}(t)\Phi\ .$$
- *A (única) solução do problema de valor inicial:*
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$
$$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$$
é dada por $\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{C}$, *sendo* $\Phi(t)$ *uma matriz fundamental do sistema 1 e* $\boldsymbol{C} = \Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{X}_0$. *Ou seja,* $\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{X}_0$. *Em particular, se* $\Phi(t_0) = \boldsymbol{I}$, *a única solução do PVI é dada por* $\boldsymbol{X}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{X}_0$.

2. Exponencial de matrizes

Consideremos novamente o sistema de equações na forma matricial com a matriz A de *coeficientes constantes*, ou seja, o sistema:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2}$$

com os coeficientes de $\mathbf{A}$ independentes de t.

No caso de uma única equação, ou seja, para o problema de valor inicial, $\dot{x} = ax,\ a \in \mathbb{R},\ c(0) = x_0$, sabemos que a solução é dada pela exponencial $x(t) = e^{at}x_0$. Isto pode sugerir a possibilidade de definir a *exponencial de matrizes* $e^{\mathbf{A}}$ de tal forma que a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ seja, analogamente, $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$.

2.1. Definição por série de potências.

Lembrando que $f(x) = e^x$ é igual à sua série de Taylor em torno da origem, isto é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

definimos

Definição 3. *A exponencial de uma matriz* $\boldsymbol{A}$ $n \times n$*:*

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \cdots = \sum_0^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!},$$

É possível mostrar que a série acima de fato converge para qualquer matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes reais (e mesmo complexos) e que satisfaz propriedades análogas à da exponencial de números. Em particular, vale que

(1) Se $\mathbf{A}$ é matriz diagonal então a exponencial $e^{\mathbf{A}}$ também é matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $e^{\mathbf{A}}$ são as exponenciais dos elementos correspondes da diagonal de $\mathbf{A}$.
(2) Se $\mathbf{A}$ é matriz nilpotente, isto é $\mathbf{A}^n = 0$ para n suficientemente grande então a série da exponencial se torna uma soma *finita.*
(3) Se $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^{-1}$ então $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{M}e^{\mathbf{A}}\mathbf{M}^{-1}$.

Exemplo 4. *Calcular* $e^{\boldsymbol{A}}$ *nos casos:*

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Supondo que podemos derivar a somatória termo a termo, podemos provar o seguinte resultado importante

Proposição 5. *Se* $\boldsymbol{A}$ *é matriz* $n\times n$ *então* $\frac{d}{dt}e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}} = e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$. *e* $e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}{}_{t=t_0} = \boldsymbol{I}$

Ou seja, $e^{(t-t_0)\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}_0$ *é a (única) solução do problema de valor inicial:*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$$
$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0$$

Uma aplicação deste resultado ao cálculo de exponencias de matrizes é o seguinte

Corolário 6. *Se* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *são matrizes* $n \times n$ *que comutam então* $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}$.

Exemplo 7. *Calcular* $e^{t\boldsymbol{A}}$ *sendo*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora consideremos novamente o problema de valor inicial:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$
$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0.$$

Sabemos da proposição 5 que a única solução deste PVI é

$$\mathbf{X}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{X}_0.$$

Por outro lado, da proposição 2 da seção anterior, temos que, se $\Phi(t)$ for uma matriz fundamental do sistema (2) então

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0.$$

Portanto, teremos necessariamente $e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ Em particular, se $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$, então

$$e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0).$$

Vejamos como usar essa igualdade para calcular a exponencial de matrizes.

Exemplo 8. *Vimos que a solução geral do sistema* $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$*, sendo*

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. *é dada por:*

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}$ *é solução fundamental do sistema.*

$\frac{d}{dt}\, \boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}(t)\boldsymbol{X}_0$. *Tomando* $\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{M}(t)\ \boldsymbol{M}(0)^{-1}$ *teremos então* $\boldsymbol{U}(t) = e^{t\boldsymbol{A}}$. *Portanto*

$$e^{t\boldsymbol{A}} = \Phi(t)\cdot\Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$