SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM $\mathbb{R}^n$

Consideremos agora o sistema linear homogêneo de n equações com coeficientes constantes

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned} \tag{1}
$$

Na forma matricial, temos o sistema $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ax}$, sendo $\mathbf{A}$ a matriz

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \tag{2}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} + \lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \det(A - \lambda)$ o polinômio característico de A. Então $p(\lambda)$ pode ser decomposto como produto de termos de grau 1.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, sendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ as raízes de p (complexas, algumas eventualmente repetidas).

Date: November 25, 2020.

Lembremos que as multiplicidades *algébrica* e *geométrica* foram definidas como segue:

Definição 1. *A multiplicidade* algébrica *de λ_i é o número de vezes que λ_i se repete na decomposição acima.*

A multiplicidade geométrica *de λ_i é a dimensão do autoespaço associado a λ_i.*

Vamos considerar as diferentes situações para a multiplicidade dos autovalores. Podemos supor que os autovalores estão de ordenados de forma que:

1) Os primeiros m_1 autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{m_1}$ são reais e distintos, e sejam $v_1, v_2, \cdots, v_{m_1}$ os autovetores correspondentes. Então, como vimos no caso do plano, teremos m_1 soluções linearmente independentes $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \cdots, x_m(t) = e^{\lambda_{m_1} t} v_{m_1}$.

2) Os autovalores seguintes $\lambda_{m_1+1}, \lambda_{m_1+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2}$ são reais, têm multiplicidade algébrica e geométrica iguais e maiores do que 1. Este caso é análogo ao anterior, temos novamente m_2 soluções linearmente independentes da forma: $x_1(t) = e^{\lambda_{m_1+1} t} v_{m_1+1}, \cdots, x_m(t) = e^{\lambda_{m_1+m_2} t} v_{m_1+m_2}$.

3) Os autovalores seguintes $\lambda_{m_1+m_2+1}, \lambda_{m_1+m_2+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3}$ são reais, têm multiplicidade geométrica 1 e multiplicidade algébrica maior do que 1. Vimos, no caso do plano que, se a multiplicidade algébrica de λ_i é 2, então temos 2 soluções linearmente independentes $x_1(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ e $x_2(t) = e^{\lambda_i t} w_i + t e^{\lambda_i t} v_i$, sendo w_i autovetor generalizado, ou seja $(\mathbf{A} - \lambda)(w_i) = vi$.

De maneira análoga, podemos mostrar que, se a multiplicidade algébrica de λ_i é 3, então temos 3 soluções linearmente independentes red $x_1(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, $x_2(t) = e^{\lambda_i t} w_i + t e^{\lambda_i t} v_i$ e $x_3(t) = e^{\lambda_i t} z_i + t e^{\lambda_i t} w_i + \frac{1}{2!} \cdot t^2 e^{\lambda_i t} v_i$, w_i, z_i autovetores generalizados, $(\mathbf{A} - \lambda)(w_i) = vi$, $(\mathbf{A} - \lambda)(z_i) = wi$.

E assim sucessivamente, conforme a multiplicidade algébrica aumenta.

4) Os autovalores seguintes
$\lambda_{m_1+m_2+m_3+1}, \lambda_{m_1+m_2+m_3+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4}$ são complexos e têm multiplicidade algébrica e geométrica iguais

Nesse caso, como vimos no caso real, teremos m_4 soluções *complexas* linearmente independentes do tipo $x_i(t) = e^{\lambda_1 t} v_i$, sendo v_i autovetor complexo associado a λ_i, $m_1 + m_2 + m_3 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

A cada par de autovalores complexos conjugados $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, e $\overline{\lambda_i} = \alpha_i - i\beta_i$ com autovetores associados respectivos $v_i^1 + iv_i^2$ e $v_i^1 iv_i^2$, teremos 2 soluções reais linearmente independentes $e^{\alpha_i t}(\cos \beta_i t v_i^1 - \text{sen } \beta_i t v^2)$ e $e^{\alpha_i t}(\cos \beta_i t v_i^2 + \text{sen } \beta_i t v_i^1)$.

5) Os autovalores seguintes
$\lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+1}, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+2} \cdots, \lambda_{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5}$ são complexos e têm multiplicidade geométrica 1 e multiplicidade algébrica maior do que 1.

teremos m_5 soluções *complexas* linearmente independentes do tipo $x_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, sendo v_i autovetor complexo associado a λ_i, $m_1 + m_2 + m_4 + 1 \leq i \leq m_1 + m_2 + m_3 + m_5$. e soluções *complexas* do tipo: $e^{\lambda_i t} z_i + te^{\lambda_i t} w_i + \frac{1}{2!} \cdot t^2 e^{\lambda_i t} v_i + \cdots$, $w_i, z_i, \cdots$ autovetores generalizados. Para cada par de autovalores complexos conjugados $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ e $\overline{\lambda_i} = \alpha_i - i\beta_i$, podemos obter 2 soluções reais linearmente independentes tomando as partes real e imaginária da solução complexa.

Assim, em qualquer caso, podemos encontrar n soluções linearmente independentes e, portanto, a solução geral do sistema.

Exemplo 2. *Encontrar a solução geral do sistema:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y + 2z \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y - 2 \\ \frac{dz}{dt} &= 2x - 2y + z \end{aligned}$$

Solução. Na forma matricial, temos o sistema; $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. A equação característica é:

$$det\,(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0.$$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A primeira linha da matriz significa que $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é autovetor, se $x - y + z = 0$. Fazendo $y = 1$ e $z = 0$, obtemos o autovetor

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, fazendo $y = 0$ e $z = 1$, obtemos o autovetor
$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como v_1 ev_2 são L.I., a multiplicidade algébrica e geométrica de $\lambda = -1$ são ambas iguais a 2 e, portanto, obtemos as soluções L.I de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}$,

$\mathbf{x}_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_3 = 5$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A primeira linha da matriz significa que $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é autovetor, se $x = z$ e a segunda que $y = -z$ Fazendo $z = 1$, obtemos o autovetor
$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, a solução L.I de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}$,

$$\mathbf{x}_1 = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a solução geral é dada por:

$$\mathbf{x} = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3. *Encontrar as solução geral para o sistema de duas massas e três molas da figura abaixo, sendo k_1, k_2 e k_3 as constantes de Hooke das molas e supondo $F_1(t) = F_2(t) \equiv 0$.*

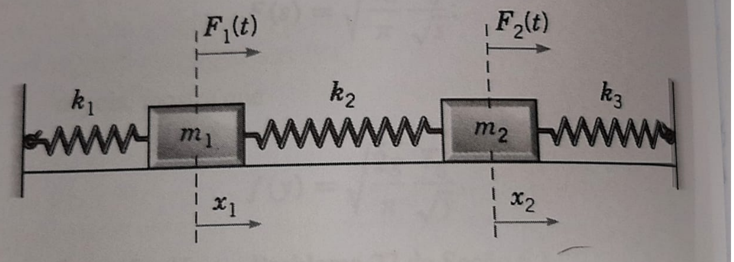

FIG. 7.1.1 Um sistema com duas massas e três molas.

Figure 1.

Usando a 2^a lei de Newton, obtemos um sistemas de duas equações de segunda ordem:

Encontrar a solução geral do sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

Definindo: $y_1 = x_1$,$y_2 = x_2$ $y_3 = \frac{d x_1}{d t}$, $y_4 = \frac{d x_2}{d t}$ e supondo $m_1 = 2$, $m_2 = 9/4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 15/4$, obtemos o sistema de linear de 1^a ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d y_1}{d t} &= y_3 \\ \frac{d y_2}{d t} &= y_4 \\ \frac{d y_3}{d t} &= -2y_1 + (3/2)y_2 \\ \frac{d y_4}{d t} &= (4/3)y_1 - 3y_2, \end{aligned}$$

ou, na forma matricial, $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A equação característica é:

$$det\,(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & -\lambda & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^4+5\lambda^2=4=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2+1)(\lambda^2+4)=0.$$

Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são então $2i$ $-i$ i e $-i$ com autovetores associados:

$$v_1=\begin{bmatrix} 3i/8 \\ -i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} -3i/8 \\ i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix} -3i/2 \\ -i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix} 3i/2 \\ i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos, portanto, as soluções complexas, linearmente independentes.

$$y_1=e^{2it}\begin{bmatrix} 3i/8 \\ -i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}, y_2=\overline{y_1}e^{-2it}\begin{bmatrix} -3i/8 \\ i/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}, y_3=e^{it}\begin{bmatrix} -3i/2 \\ -i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y_4=\overline{y_3}e^{-it}\begin{bmatrix} 3i/2 \\ i \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando e colocando na forma Re + i Im:

$$y_1=\begin{bmatrix} -3\text{sen }(2t)/8 \\ \text{sen }(2t)/2 \\ --(3\cos(2t))/4 \\ \cos(t) \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} 3\cos(2t))/8 \\ -\cos(2t)/2 \\ -(3sen(2))/4 \\ \text{sen }(t) \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} -3\text{sen }(2t)/8 \\ \text{sen }(2t)/2 \\ -(3\cos(2t))/4 \\ \cos(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 3\cos(2t))/8 \\ +\cos(2t)/2 \\ (3sen(2))/4 \\ \text{sen }(t) \end{bmatrix}$$

(Observe que $y_2 = \overline{y_1}$)

$$y_3 = \begin{bmatrix} 3\text{sen }(t)/2 \\ \text{sen }(t) \\ (3\cos(t))/2 \\ \cos(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -3\cos(t)/2 \\ -\cos(t) \\ (3sen(t))/2 \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} 3\text{sen }(t)/2 \\ \text{sen }(t) \\ (3\cos(t))/2 \\ \cos(t) \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -3\cos(t)/2 \\ -\cos(t) \\ (3sen(t))/2 \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Tomando as partes real e imaginária de y_1 e y_2, encontramos soluções *reais* linearmente independentes.

Daí, obtemos a solução geral

$$y = c_1 \begin{bmatrix} -3\text{sen }(2t)/8 \\ \text{sen }(2t)/2 \\ --(3\cos(2t))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3\cos(2t))/8 \\ -\cos(2t)/2 \\ -(3sen(2))/4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3\text{sen }(t)/2 \\ \text{sen }(t) \\ (3\cos(t))/2 \\ \cos(t) \end{bmatrix} +$$

$$c_4 \begin{bmatrix} -3\cos(t)/2 \\ -\cos(t) \\ (3sen(t))/2 \\ sen(t) \end{bmatrix}.$$