MAT 0234 - Medida e Integração

IME-USP. Segundo semestre de 2020

Funções Mensuráveis

Lista

Definição: um espaço X com uma σ-álgebra $\boldsymbol{A} \subset \wp(X)$ é um **espaço mensurável**.

Em todas as questões abaixo, $(X, \boldsymbol{A})$ é um espaço mensurável.

1. sejam $(X_1, \mathbf{A_1})$ e $(X_2, \mathbf{A_2})$ dois espaços mensuráveis $f : (X_1, \mathbf{A_1}) \to (X_2, \mathbf{A_2})$. Dizemos que f **mensurável** se dado B $\in \mathbf{A_2}$ então $f^{-1}(B) \in \mathbf{A_1}$

2. Sejam $f : (X_1, \mathbf{A_1}) \to (X_2, \mathbf{A_2})$ e $\mathbf{F_2}$ família geradora da σ - álgebra $\mathbf{A_2}$. Então f é mensurável $\Leftrightarrow$ dado B $\in \mathbf{F_2}$ então $f^{-1}(B) \in \mathbf{A_1}$. Isto significa que para verificar se f é mensurável basta verificá-lo numa família geradora.

   Portanto, no caso de $(X_2, \mathbf{A_2}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}$ são os Borelianos de $\mathbb{R}$, $f : (X_1, \mathbf{A_1}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é mensurável $\Leftrightarrow$ verifica alguma (e portanto todas) das propriedades seguintes:

   (a) $f^{-1}(a, b) \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos abertos (a,b)
   (b) $f^{-1}[a, b] \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos fechados [a,b]
   (c) $f^{-1}[a, b) \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-abertos [a,b)
   (d) $f^{-1}(a, b] \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-abertos (a,b]
   (e) $f^{-1}[a, +\infty) \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-infinitos fechados à esquerda $[a, +\infty)$
   (f) $f^{-1}(-\infty), a] \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-infinitos fechados à direita $(-\infty, a]$
   (g) $f^{-1}(a, +\infty) \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-infinitos abertos à esquerda$(a, +\infty)$
   (h) $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathbf{A_2}$ para os intervalos semi-infinitos abertos à direita $(-\infty, a)$

3. Mostre que se f e g são mensuráveis então $f+g$, fg, e$\alpha f + \beta g$, $f^+ = sup(f(x), 0)$, $|f|$ também são mensuráveis

4. Seja $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ com $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos Borelianos e f contínua. Então f é mensurável.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável sendo $\mathcal{A}$ a σ-álgebra dos Borelianos e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Então $g(f(x))$ é mensurável.

6. Se f for uma função mensurável e E $\in \mathcal{A}$ um conjunto mensurável então $f_{/E}$ também é mensurável

7. Dê um exemplo de $f : X \to \mathbb{R}$ não mensurável tal que $|f|$ e f^2 são mensuráveis. Soluçao: $f = 2\chi_E - 1$ onde E conjunto não mensurável.

8. Dadas f uma função mensurável e $A > 0 \in \mathbb{R}$ seja g um **truncamento** de f dada por
   $$\begin{cases} f(x);\ |f(x)| \leq A \\ A\ f(x) \geq A \\ -A\ f(x) \leq -A \end{cases}$$
   Mostre que g é mensurável

9. Dada f uma função mensurável, A um conjunto mensurável e χ_A sua função característica. Então a função $g = f\chi_A$ é mensurável

10. Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X. Então $\{x \in X / \ \exists \ \lim f_n(x)\}$ é mensurável.

11. Seja $f : (X, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ mensurável, $f \geq 0$. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções mensuráveis tal que:

    (a) $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$
    (b) $f(x) = lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
    (c) ϕ_n só tem um número finito de valores .
    (d) Se f limitada então $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

    Seja $f : (X, \boldsymbol{A}) \to \mathbb{R}$ mensurável, $f \geq 0$. Então existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções mensuráveis tal que:

    (a) $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$
    (b) $f(x) = lim\ \phi_n(x)\ \forall\ x\ \in X$
    (c) ϕ_n só tem um número enumerável de valores .
    (d) $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para f

12. Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis em X. Então o conjunto $A = \{x \ \in \ X \ tal\ que \ \exists \ limf_n(x)\}$ é mensurável. Solução: sejam $g_1 = \limsup f_n(x)$ e $g_2 = \liminf f_n(x)$. Então elas são mensuráveis. Analisemos o caso em que as duas são finitas: $A = \{g_1(x) = g_2(x)\ ou\ g_1 - g_2 = 0\}$. Este conjunto é mensurável porque é a imagem inversa do 0 para $g_1 - g_2$. Agora se $B = \{limf_n(x) = +\infty\}$ então $B = \{g_2 = +\infty\}$.

13. Seja $h : (X, \boldsymbol{A}) \to (\mathbb{C}, \boldsymbol{B})$ onde $\boldsymbol{B}$ são os Borelianos de $\mathbb{C}$. Mostre que h é mensurável se e somente se $\{x \ \in \ X,\ a < Re(h) < b\} \cap \{x \ \in \ X,\ c < Im(h) < d\} \ \in \ \boldsymbol{A}$ para todos os reais a, b, c, d. Ou também, h mensurável se $h^{-1}(G)$ para todo retângulo aberto em $\mathbb{C}$.

14. Defina $sgn : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $sgn(z) = \dfrac{z}{|z|}$ se $z \neq 0$ e $sgn(0) = 0$, de modo que $\forall z \in \mathbb{C}$ temos $z = sgn(z) \cdot |z|$. Então sgn é mensurável.

15. Sejam $(X, \boldsymbol{A})$ espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$.
    Então $f = sgn(f) \cdot |f|$ (esta é a *decomposição polar* de f).

16. f é mensurável $\iff$ $sgn(f)$ e $|f|$ o forem.

17. Se $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ e $\forall r \in \bar{\mathbb{Q}}\ f^{-1}((r, \infty]) \in \boldsymbol{A}$, então f é mensurável.

18. Se $X = A \cup B$, com $A, B \in \boldsymbol{A}$, uma função f em X é mensurável $\iff$ f/A e f/B forem mensuráveis.

19. O supremo de uma família não enumerável de funções mensuráveis $f_\lambda : X \to \bar{\mathbb{R}}$ pode não ser mensurável.

20. Se $f : (\mathbb{R}, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ é monótona, então f é Borel-mensurável.