

# Aula 9 – Integrais de funções racionais

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

## Objetivo da aula:

Discutir manipulações algébricas e estratégias para calcular integrais de funções *racionais*, isto é, da forma  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , onde ambas  $P(x)$  e  $Q(x)$  são funções polinomiais.

### Exemplo 1

Calcule  $\int \frac{5x - 2}{2x^2 - x - 1} dx$ .

## Exemplo 2

Calcule  $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$ .

### Exemplo 3

Calcule  $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$ .

### Exemplo 4

Calcule  $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 8} dx$ .

**Calculando**  $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j} dx$ , com  $ax^2 + bx + c$  **irredutível**.

1. Usando a técnica de completar quadrado e a regra da substituição, podemos assumir que  $b = 0$ .
2. A parcela  $\frac{Ax}{(ax^2+c)^j}$  integramos fazendo a substituição  $u = ax^2 + c$ .
3. Para integramos  $\frac{B}{(ax^2+c)^j}$  escrevemos  $\frac{B}{(ax^2+c)^j} = \frac{B}{a^j(x^2+\frac{c}{a})^j}$ , notando que  $\frac{c}{a} > 0$ , pois o polinômio é irredutível.
4. Tomando  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$ , temos  $\frac{B}{(ax^2+c)^j} = \frac{B}{a^j(x^2+k^2)^j}$ .
5. Usamos a substituição  $u = \frac{x}{k}$  e obtemos  $\frac{B}{(ax^2+c)^j} = \frac{B}{a^j k^{2j} (u^2+1)^j}$ .
6. Usamos a substituição inversa  $u = \operatorname{tg} \theta$  para calcular essa integral, como na aula 8.

**Calculando**  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , com  $gr(P(x)) < gr(Q(x))$

1. Decomponha  $Q(x)$  em fatores lineares e quadráticos irreduzíveis.
2. Resolvendo um sistema, escreva  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  como soma de parcelas da forma  $\frac{A}{(ax + b)^j}$  ou  $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$ , onde esses denominadores são os fatores de  $Q(x)$ .
3. As parcelas da forma  $\frac{A}{(ax + b)^j}$  integramos usando a substituição  $u = ax + b$ .
4. As parcelas da forma  $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$  integramos usando o método anterior.



### Exemplo 5

Calcule  $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$ .

**Calculando**  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , com  $gr(P(x)) \geq gr(Q(x))$

1. Efetuando a divisão de polinômios, escreva

$$P(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ onde } S(x) \text{ e } R(x) \text{ são polinômios e } gr(R(x)) < gr(Q(x)).$$

2. Use o método anterior para calcular  $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$

## Exemplo 6

Calcule  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 + x - 2} dx$ .

## Substituições racionalizantes

- ▶ Ocorrem quando usamos a regra da substituição para transformar uma função em uma função racional.
- ▶ Geralmente são substituições da forma  $u = \sqrt[n]{g(x)}$ , onde  $g(x)$  é um polinômio.
- ▶ A variável “velha”  $x$  se escreve como um polinômio em função da variável “nova”  $u$ .
- ▶ Escrevemos  $dx$  em função de  $du$ , e não o contrário.

### Exemplo 7

Calcule  $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$ .

**Fim**