

---

# Lógica

## Aula 13

Renata Wassermann

`renata@ime.usp.br`

2020

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*

*Sócrates é homem.*

---

*Sócrates é mortal.*

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*

---

*Sócrates é mortal.*

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*  $s \rightarrow m$

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*  $s \rightarrow m$

“Existe um homem que não é mortal.”

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*  $s \rightarrow m$

“Existe um homem que não é mortal.”  $\implies h \rightarrow \neg m$  ?

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*  $s \rightarrow m$

“Existe um homem que não é mortal.”  $\implies h \rightarrow \neg m$  ?

$h \rightarrow \neg m, s \rightarrow h \vdash s \rightarrow \neg m$

# Silogismo

*Todo homem é mortal.*  $h \rightarrow m$

*Sócrates é homem.*  $s \rightarrow h$

---

*Sócrates é mortal.*  $s \rightarrow m$

“Existe um homem que não é mortal.”  $\implies h \rightarrow \neg m$  ?

$h \rightarrow \neg m, s \rightarrow h \vdash s \rightarrow \neg m$  (Sócrates é imortal!)

## Necessidade de uma linguagem mais rica

Não temos como diferenciar “todo” e “existe”:

## Necessidade de uma linguagem mais rica

Não temos como diferenciar “todo” e “existe”:

- “Existe um homem que não é mortal.”

## Necessidade de uma linguagem mais rica

Não temos como diferenciar “todo” e “existe”:

- “Existe um homem que não é mortal.”
- “Todo homem é imortal.”

## Necessidade de uma linguagem mais rica

Não temos como diferenciar “todo” e “existe”:

- “Existe um homem que não é mortal.”
- “Todo homem é imortal.”

Como representar “Todo aluno é orientado por algum professor.”?

## Adicionando estrutura

$A(\text{joão})$ : João é aluno

## Adicionando estrutura

$A(\text{joão})$ : João é aluno

$P(\text{pedro})$ : Pedro é professor

## Adicionando estrutura

$A(\text{joão})$ : João é aluno

$P(\text{pedro})$ : Pedro é professor

$O(\text{pedro}, \text{joão})$ : Pedro é orientador de João

## Adicionando estrutura

$A(\text{joão})$ : João é aluno

$P(\text{pedro})$ : Pedro é professor

$O(\text{pedro}, \text{joão})$ : Pedro é orientador de João

## Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

H(s): Sócrates é homem.

## Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

H(s): Sócrates é homem.

M(s): Sócrates é mortal

# Quantificadores

Conjunto de alunos:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

# Quantificadores

Conjunto de alunos:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

“Todo aluno”:  $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

# Quantificadores

Conjunto de alunos:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

“Todo aluno”:  $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

“Existe um aluno”:  $A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

## Quantificadores

Conjunto de alunos:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

“Todo aluno”:  $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

“Existe um aluno”:  $A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

Mas e “todo número natural”?

# Quantificadores

Usando variáveis:

$A(x)$ :  $x$  é um aluno

# Quantificadores

Usando variáveis:

$A(x)$ :  $x$  é um aluno (ou  $A(y)$ :  $y$  é um aluno)

# Quantificadores

Usando variáveis:

$A(x)$ :  $x$  é um aluno (ou  $A(y)$ :  $y$  é um aluno)

$P(x)$ :  $x$  é professor

# Quantificadores

Usando variáveis:

$A(x)$ :  $x$  é um aluno (ou  $A(y)$ :  $y$  é um aluno)

$P(x)$ :  $x$  é professor

$O(x, y)$ :  $x$  é orientador de  $y$

## Quantificadores

Usando variáveis:

$A(x)$ :  $x$  é um aluno (ou  $A(y)$ :  $y$  é um aluno)

$P(x)$ :  $x$  é professor

$O(x, y)$ :  $x$  é orientador de  $y$

“Todo aluno é orientado por algum professor.”

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y, x)))$$

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

$$\neg(\forall x(Passaro(x) \rightarrow Voa(x)))$$

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

$$\neg(\forall x(Passaro(x) \rightarrow Voa(x)))$$

$$\exists x(Passaro(x) \wedge \neg Voa(x))$$

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

$$\neg(\forall x(Passaro(x) \rightarrow Voa(x)))$$

$$\exists x(Passaro(x) \wedge \neg Voa(x))$$

“Toda criança é mais nova que sua mãe”

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

$$\neg(\forall x(Passaro(x) \rightarrow Voa(x)))$$

$$\exists x(Passaro(x) \wedge \neg Voa(x))$$

“Toda criança é mais nova que sua mãe”

$$\forall x\forall y(Crianca(x) \wedge Mãe(y, x) \rightarrow MaisNovaQue(x, y))$$

## Exemplos

“Nem todo pássaro voa”

$$\neg(\forall x(\text{Passaro}(x) \rightarrow \text{Voa}(x)))$$

$$\exists x(\text{Passaro}(x) \wedge \neg \text{Voa}(x))$$

“Toda criança é mais nova que sua mãe”

$$\forall x \forall y (\text{Criança}(x) \wedge \text{Mãe}(y, x) \rightarrow \text{MaisNovaQue}(x, y))$$

$$\forall x (\text{Criança}(x) \rightarrow \text{MaisNovaQue}(x, \text{mãe}(x)))$$

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

$$\forall x \forall y \forall w \forall z (Mae(x, y) \wedge Mae(y, andre) \wedge Mae(w, z) \wedge Mae(z, pedro) \rightarrow x = w)$$

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

$$\forall x \forall y \forall w \forall z (Mae(x, y) \wedge Mae(y, andre) \wedge \\ Mae(w, z) \wedge Mae(z, pedro) \rightarrow x = w) \\ \text{m\~{a}e(m\~{a}e(andr\~{e})) = m\~{a}e(m\~{a}e(pedro))$$

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

$$\forall x \forall y \forall w \forall z (Mae(x, y) \wedge Mae(y, andre) \wedge \\ Mae(w, z) \wedge Mae(z, pedro) \rightarrow x = w) \\ \text{mãe(mãe(andr e))} = \text{mãe(mãe(pedro))}$$

“Todo filho do meu pai é meu irmão”.

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

$$\forall x \forall y \forall w \forall z (Mae(x, y) \wedge Mae(y, andre) \wedge \\ Mae(w, z) \wedge Mae(z, pedro) \rightarrow x = w) \\ \text{m\~{a}e(m\~{a}e(andr\~{e})) = m\~{a}e(m\~{a}e(pedro))$$

“Todo filho do meu pai é meu irmão”.

$$\forall x \forall y (Pai(x, eu) \wedge Pai(x, y) \wedge \neg(y = eu) \rightarrow \\ Irmao(y, eu))$$

## Exemplos

“André e Pedro têm a mesma avó materna.”

$$\forall x \forall y \forall w \forall z (Mae(x, y) \wedge Mae(y, andre) \wedge \\ Mae(w, z) \wedge Mae(z, pedro) \rightarrow x = w) \\ \text{m\~{a}e(m\~{a}e(andr\~{e})) = m\~{a}e(m\~{a}e(pedro))$$

“Todo filho do meu pai é meu irmão”.

$$\forall x \forall y (Pai(x, eu) \wedge Pai(x, y) \wedge \neg(y = eu) \rightarrow \\ Irmao(y, eu)) \\ \forall x (pai(x) = pai(eu) \wedge \neg(x = eu) \rightarrow Irmao(x, eu))$$

# Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)

# Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)

# Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe( $x$ ) (unária)
- nota( $x,y$ ): nota de  $x$  no curso  $y$  (binária)
- preço( $x,y,z$ ): preço de  $x$  na loja  $y$  na data  $z$  (ternária)

# Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe( $x$ ) (unária)
- nota( $x,y$ ): nota de  $x$  no curso  $y$  (binária)
- preço( $x,y,z$ ): preço de  $x$  na loja  $y$  na data  $z$  (ternária)
- ...

# Aridade

## Símbolos de Funções:

- $m\tilde{a}e(x)$  (unária)
- $nota(x,y)$ : nota de  $x$  no curso  $y$  (binária)
- $pre\tilde{c}o(x,y,z)$ : preço de  $x$  na loja  $y$  na data  $z$  (ternária)
- ...
- $min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ : mínimo (n-ária)

# Aridade

## Símbolos de Funções:

- mãe( $x$ ) (unária)
- nota( $x,y$ ): nota de  $x$  no curso  $y$  (binária)
- preço( $x,y,z$ ): preço de  $x$  na loja  $y$  na data  $z$  (ternária)
- ...
- $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ : mínimo (n-ária)

# Aridade

Símbolos de Funções:

- $mãe(x)$  (unária)
- $nota(x,y)$ : nota de  $x$  no curso  $y$  (binária)
- $preço(x,y,z)$ : preço de  $x$  na loja  $y$  na data  $z$  (ternária)
- ...
- $min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ : mínimo ( $n$ -ária)

Constantes (andré, sócrates)  $\implies$  funções de aridade zero.

# Aridade

Predicados:

- $A(x)$ :  $x$  é aluno (unário)

# Aridade

Predicados:

- $A(x)$ :  $x$  é aluno (unário)
- $O(x,y)$ :  $x$  é orientador de  $y$  (binário)

# Aridade

Predicados:

- $A(x)$ :  $x$  é aluno (unário)
- $O(x,y)$ :  $x$  é orientador de  $y$  (binário)
- $D(x,y,z)$ :  $x$  é mais distante de  $z$  do que  $y$  (ternário)

# Aridade

Predicados:

- $A(x)$ :  $x$  é aluno (unário)
- $O(x,y)$ :  $x$  é orientador de  $y$  (binário)
- $D(x,y,z)$ :  $x$  é mais distante de  $z$  do que  $y$  (ternário)
- ...

# Aridade

Predicados:

- $A(x)$ :  $x$  é aluno (unário)
- $O(x,y)$ :  $x$  é orientador de  $y$  (binário)
- $D(x,y,z)$ :  $x$  é mais distante de  $z$  do que  $y$  (ternário)
- ...
- $Disjuntos(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (n-ário)