

Estimação Espectral Paramétrica

1. Introdução

No capítulo anterior estudamos os métodos de estimação espectral baseados na utilização da transformada discreta de Fourier (TDF), referidos como métodos de estimação espectral clássicos para distingui-los dos métodos mais modernos. Neste capítulo será introduzida uma abordagem alternativa, um modelo paramétrico, para descrever um processo aleatório e estimar o espectro densidade de potência.

2. Modelo com função de transferência racional

Muitos processos aleatórios de tempo discreto encontrados no mundo real são bem aproximados por um modelo de função de transferência racional conhecido também como séries temporais. Neste modelo a seqüência de dados $x(n)$ é descrita pela seguinte equação de diferenças com coeficientes constantes:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^P a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^Q b_k u(n-k) \quad (1)$$

em que $u(n)$ é a seqüência de excitação da entrada.

Este é um modelo generalizado e é denominado de modelo ARMA (*AutoRegressive Moving Average*). Observe que ele corresponde a um sistema linear invariante ao deslocamento com pólos e zeros, cuja excitação de entrada é $u(n)$. Em geral $u(n)$ é admitido ser um ruído branco.

A equação (1) nos mostra que $x(n)$ consiste de duas partes: uma parte determinística determinada pelos coeficientes a_k e uma parte, em geral, aleatória que depende de $u(n)$.

Calculando a transformada z da equação (1) tem-se que:

$$X(z) = -\sum_{k=1}^P a_k z^{-k} X(z) + \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k} U(z)$$

$$\left\{ 1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k} \right\} X(z) = \left\{ \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k} \right\} U(z)$$

portanto

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} U(z) \quad (2)$$

Admitindo:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} \quad (3)$$

Observe que $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}$ com $a_0 = 1$, pertence ao ramo autoregressivo do modelo e

$B(z) = \sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}$ pertence à parte de média móvel. Assim o sinal pode ser modelado por um filtro de tempo discreto linear, invariante ao deslocamento com função do sistema $H(z)$ e sinal de excitação $u(n)$, tal que:

$$X(z) = H(z)U(z) \quad (4)$$

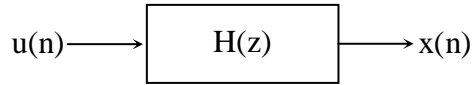


Figura 1: Modelo linear

Para um sinal modelado como na equação (4), o espectro densidade de potência é dado por:

$$P_x(z) = H(z)H^*(1/z^*)P_u(z) \quad (5)$$

Admitindo que $H(z)$ seja estável então no círculo de raio unitário, admitindo $z = \exp(2\pi f)$ então a equação (5) torna-se:

$$P_x(f) = |H(f)|^2 P_u(f) \quad (6)$$

Em muitas situações práticas a seqüência de alimentação pode ser admitida um ruído branco com valor médio nulo e variância σ_u^2 . Neste caso:

$$P_x(f) = |H(f)|^2 \sigma_u^2 = \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \sigma_u^2 \quad (7)$$

Como o espectro densidade de potência da excitação é constante, então o espectro densidade de potência do sinal $x(n)$ é uma função racional no domínio da frequência e que depende dos coeficientes a_k e b_k . Assim, a especificação dos parâmetros a_k , b_k e σ_u^2 é equivalente a especificar o espectro densidade de potência de $x(n)$. Em geral admite-se $a_0 = b_0 = 1$, pois qualquer ganho do filtro pode ser incorporado na variância da excitação.

O modelo definido acima indica que o processo é gerado por um sistema linear com pólos e zeros. Ele é conhecido como modelo ARMA(P,Q) : modelo autoregressivo com média móvel, em que P (número de pólos) e Q (número de zeros) são as ordens do modelo. A partir do modelo ARMA, outros dois modelos são identificados: O modelo de média móvel MA(Q) → modelo somente com zeros (sistema FIR) e o modelo autoregressivo AR(P) → modelo somente com pólos (sistema IIR).

Modelo de média móvel

Se os coeficientes a_k são todos nulos, exceto $a_0 = 1$, então a equação (1) é reescrita como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^Q b_k u(n-k) \quad (9)$$

Neste caso o processo é chamado de processo de média móvel (MA *moving average*) de ordem Q ou modelo somente com zeros e o espectro densidade de potência é dado por:

$$P_x(f) = |B(f)|^2 \sigma_u^2 \quad (10)$$

Modelo autoregressivo

Se os coeficientes b_k são todos nulos, exceto $b_0 = 1$, então a equação (1) pode ser reescrita como:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^P a_k x(n-k) + u(n) \quad (11)$$

Neste caso o processo é chamado de processo autoregressivo de ordem P (AR *autoregressive*) ou modelo somente com pólos. Observe que $x(n)$ é uma regressão linear em que $u(n)$ é um erro, $x(n)$ é expressa como uma soma ponderada de seus valores passados mais um termo de erro ou ruído chamado de resíduo. Neste caso o espectro densidade de potência é dado por:

$$P_x(f) = \frac{1}{|A(f)|^2} \sigma_u^2 \quad (12)$$

3. Predição linear do modelo autoregressivo

Nesta seção vamos estudar um método para se determinar os coeficientes a_k . O problema da predição linear consiste em estimar (ou predizer) uma amostra não observada $x(n)$, baseando-se em um conjunto de amostras observadas $\{x(n-1), \dots, x(n-P)\}$, isto é, $x(n)$ é estimada com base em P amostras anteriores do sinal. Define-se então um preditor linear como uma combinação linear de P amostras anteriores do sinal, isto é:

$$\hat{x}(n) = -a_1 x(n-1) - \dots - a_P x(n-P) = -\sum_{k=1}^P a_k x(n-k) \quad (13)$$

Na equação (13) o sobrescrito “chapéu” indica amostra estimada, os coeficientes a_k são admitidos constantes e o sinal negativo é utilizado por conveniência no equacionamento.

Observe que a amostra é estimada, assim, existe uma diferença entre a estimativa e o valor correto da amostra. Ele é chamado de erro de predição. Este erro é definido como a diferença entre a amostra original e a estimada, portanto ele é dado por:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^P a_k x(n-k) \quad (14)$$

Rearranjando a equação acima podemos escrever $x(n)$ em função de $e(n)$ e de suas amostras anteriores, assim, tem-se que:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^P a_k x(n-k) + e(n) \quad (15)$$

Observe que, se substituirmos $e(n)$ por $u(n)$, a equação acima se torna idêntica à equação (11) do modelo autoregressivo. Portanto podemos afirmar que os coeficientes ótimos da predição linear são os parâmetros do modelo AR, logo os coeficientes a_k podem ser estimados pela minimização da potência do erro de predição ξ .

$$\xi = E[e(n)^2] = E[x(n) - \hat{x}(n)]^2 \quad (16)$$

Estimação dos coeficientes a_k

Admitindo que $x(n)$ seja estacionário no sentido amplo podemos minimizar o erro utilizando o princípio da ortogonalidade, isto é, para que o erro de predição $e(n)$ seja mínimo, este deve ser ortogonal aos valores do sinal $\{x(n-k), k = 1, 2, \dots, P\}$ que entram na predição. Assim:

$$E[e(n)x^*(n-k)] = 0 \quad : k = 1, 2, \dots, P \quad (17)$$

em que a notação $E[.]$ indica o cálculo do valor esperado.

Como $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ então:

$$E[x(n)x^*(n-k)] - E[\hat{x}(n)x^*(n-k)] = 0 \quad : k = 1, 2, \dots, P$$

Substituído a equação (13) na equação acima teremos:

$$E[x(n)x^*(n-k)] + E\left[\sum_{l=1}^P a_l x(n-l)x^*(n-k)\right] = 0 \quad : k = 1, 2, \dots, P$$

Como o valor esperado da soma é a soma dos valores esperados, elogo:

$$E[x(n)x^*(n-k)] + \sum_{l=1}^P a_l E[x(n-l)x^*(n-k)] = 0 \quad : k = 1, 2, \dots, P$$

Como $E[x(n)x^*(n-k)]$ é a função de autocorrelação de $x(n)$ então:

$$r_x(k) = -\sum_{l=1}^P a_l r_x(k-l) \quad : k = 1, \dots, P \quad (18)$$

O sistema de equações acima é chamado de equações de Wiener-Hopf ou de Yule-Walker. Observe que tendo disponível a função de autocorrelação do sinal podemos calcular os coeficientes a_k do filtro. Na forma matricial a equação (18) é dada por:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(P-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(P-1) & r_{xx}(P-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(P) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Admitindo $k = 0$ na equação (17) encontramos a potência ou o valor quadrático médio mínimo do erro de predição, assim:

$$\begin{aligned} \xi_{MIN} &= E[x^*(n)(x(n) - \hat{x}(n))] = E[x^*(n)x(n)] - E[x^*(n)\hat{x}(n)] \\ &= r_x(0) + \sum_{k=1}^P a_k E[x^*(n)x(n+k)] \end{aligned}$$

portanto:

$$\xi_{MIN} = r_x(0) + \sum_{k=1}^P a_k r_x(k) \quad (20)$$

Admitindo que o erro de predição apresente características de um ruído branco então o espectro densidade de potência será dado por:

$$\Gamma_{xx}(f) = \frac{1}{|A(f)|^2} \varepsilon_{MIN} \quad (21)$$

Exemplo 1: Um processo aleatório $x(n)$ apresenta a seguinte função de autocorrelação:

$$r_x(k) = \alpha^{|k|}$$

Determine os modelos AR(1), AR(2) e o espectro densidade de potência de $x(n)$

a) Modelo AR(1)

Como a ordem P do modelo é igual a 1 então pela equação (18): $r_x(k) = -a_1 r_x(k-1)$, portanto substituindo $r_x(k)$ nesta equação temos:

$$\alpha^{|k|} = -a_1 \alpha^{|k-1|}$$

Admitindo $k = 1$ tem-se:

$$\alpha^{|1|} = -a_1 \alpha^{|1-1|} \Rightarrow a_1 = -\alpha$$

Portanto o modelo será:

$$\hat{x}(n) = \alpha x(n-1)$$

O erro mínimo será dado por:

$$\xi_{MIN} = r_x(0) - \alpha r_x(-1) = 1 - \alpha^2$$

E o filtro $H(f)$ será dado por:

$$H(f) = \frac{1}{A(f)} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi f}}$$

b) Modelo AR(2)

Como a ordem P do modelo é agora igual a 2 então utilizando a equação na forma matricial (19) temos:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\alpha \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Observe que como $a_2 = 0$, o processo pode ser modelado por um processo AR(1) e tanto erro mínimo quanto a função do sistema são os mesmos que o anterior.

c) Espectro densidade de potência

$$P_x(f) = |H(f)|^2 \xi_{MIN} = \frac{\xi_{MIN}}{|A(f)|^2} = \frac{1 - \alpha^2}{|1 - \alpha e^{-j2\pi f}|^2}$$

4. Métodos para a estimação Espectral AR

Para a solução das equações de Wiener-Hopf é necessário conhecer a matriz de autocorrelação do processo aleatório. Em geral ela não está disponível. Ou então é difícil de se calculá-la. Na prática o que se tem disponível é uma observação dos dados com tamanho finito, isto é, $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$. Portanto para a solução do sistema de equações da equação (18) ou (19) a função de autocorrelação deve ser estimada.

Nesta secção serão apresentados dois dos métodos principais para a estimação dos parâmetros AR: o método de autocorrelação e o método de covariância que diferem entre si pelo modo que é estimado o erro quadrático médio de predição. Este por sua vez conduz a diferentes estimativas de $r_x(k)$.

4.1 Método de autocorrelação

No método de autocorrelação é admitido que se tem disponível N amostras de um processo aleatório: $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, assim, define-se a seguinte estimativa do erro quadrático médio de predição:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - \hat{x}(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^P a_k x(n-k) \right|^2 \quad (22)$$

O erro mínimo pode ser obtido derivando a equação (22) em relação aos coeficientes a_k e igualando o resultado a zero. Após alguma manipulação algébrica obtém-se:

$$\sum_{l=1}^P \hat{a}_l \hat{r}_x(k-l) = -\hat{r}_x(k) \quad : k = 1, \dots, P \quad (23)$$

em que a estimativa da função de autocorrelação é dada por:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \quad : k = 1, \dots, P \quad (24)$$

Observe que a equação acima é a estimativa polarizada da função de autocorrelação e que é necessário o cálculo de $P+1$ valores e o erro mínimo será:

$$\xi_{MIN} = \hat{r}_x(0) + \sum_{k=1}^P \hat{a}_k \hat{r}_x(-k) \quad (25)$$

Na forma matricial a equação (24) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(0) & \hat{r}_x(1) & \cdots & \hat{r}_x(P-1) \\ \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x(0) & \cdots & \hat{r}_x(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_x(P-1) & \hat{r}_x(P-2) & \cdots & \hat{r}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}(1) \\ \hat{a}(2) \\ \vdots \\ \hat{a}(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{r}_x(1) \\ \hat{r}_x(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(P) \end{bmatrix} \quad (26)$$

A matriz de autocorrelação acima é conhecida como matriz de Toeplitz ou Hermitiana. Admitindo $x(n)$ um processo real, ela apresenta as seguintes propriedades:

- É simétrica.
- Os termos da diagonal principal são constantes.
- A solução da equação (26) pode ser feita utilizando o algoritmo de Levinson que leva em consideração as propriedades da matriz de Toeplitz

Algoritmo de Levinson

i. Determine a função de autocorrelação

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \quad : k = 1, \dots, P$$

ii. Dados iniciais:

$$\hat{a}_1(1) = -\frac{\hat{r}_x(1)}{\hat{r}_x(0)} \quad e \quad \xi_1 = \frac{1 - |\hat{a}_1(1)|^2}{\hat{r}_x(0)}$$

iii. Estabeleça $k = 2$ e calcule (recursão de Levinson):

$$\hat{a}_k(k) = -\frac{\hat{r}_x(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \hat{a}_{k-1}(l)\hat{r}_x(k-l)}{\xi_{k-1}}$$

$$\hat{a}_k(i) = \hat{a}_{k-1}(i) + \hat{a}_k(k)\hat{a}_{k-1}(k-i) \quad : i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\xi_k = \left[1 - |\hat{a}_k(k)|^2\right] \xi_{k-1}$$

iv. Aumente a ordem do preditor $\rightarrow k = k+1$

v. Se $k = P + 1 \rightarrow$ FIM ou se $k \leq P \rightarrow$ VOLTE AO PASSO 4

As seguintes observações podem ser feitas:

- Se o processo é realmente autoregressivo de ordem P então $a(j) = 0$ para $j > P$.
- Se $\xi_{\text{MIN}} = 0$ então o processo consiste somente de senóides.
- Não se recomenda o uso deste método quando se tem disponível poucas amostras do sinal
- Quando da sua utilização é vantajoso utilizar uma janela de dados tipo hamming ou uma outra qualquer diferente da retangular.

4.2 Método de covariância

Como anteriormente, vamos admitir também que se tem disponível N amostras de um processo aleatório $x(n)$: $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$. A estimativa do erro quadrático médio de predição é dada por:

$$\hat{\xi} = \frac{1}{N-P} \sum_{n=P}^{N-1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^P a_k x(n-k) \right|^2 \quad (27)$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior a minimização do erro dado pela equação (2) fornece a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} c_x(1,2) & c_x(1,2) & \cdots & c_x(1,P) \\ c_x(2,1) & c_x(2,2) & \cdots & c_x(2,P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x(P,1) & c_x(P,2) & \cdots & c_x(P,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}(1) \\ \hat{a}(2) \\ \vdots \\ \hat{a}(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_x(1,0) \\ c_x(2,0) \\ \vdots \\ c_x(P,0) \end{bmatrix} \quad (28)$$

em que $c_x(j,k)$ é conhecida como matriz de covariância do sinal tal que:

$$c_x(j,k) = \frac{1}{N-P} \sum_{n=P}^{N-1} x(n-j)x(n-k) \quad : j,k = 0, \dots, P \quad (29)$$

Observe que a equação acima é diferente da estimativa da função de autocorrelação e que é necessário o cálculo de P+1 valores e o erro mínimo será:

$$\xi_{MIN} = c_x(0,0) - \sum_{k=1}^P \hat{a}_k c_x(0,k) \quad (30)$$

Note que a diferença em relação ao método anterior está no estabelecimento dos limites da somatória no erro de predição, equação (27), neste caso a matriz de covariância é simétrica, mas os elementos ao longo da diagonal principal não são iguais. Um método eficiente para resolver o sistema é utilizar a decomposição de Cholesky, que será visto a seguir.

Algoritmo de Cholesky

i. Determine a função de covariância

$$c_x(i,j) = \frac{1}{N-P} \sum_{n=P}^{N-1} x(n-i)x(n-j) \quad : i,j = 0, \dots, P$$

ii. Dados iniciais:

$$v(1,1) = \sqrt{c_x(1,1)}$$

iii. Estabeleça $i = 1$

iv. Calcule:

$$v(j,i) = \frac{1}{v(i,i)} \left\{ c_x(i,j) - \sum_{k=1}^{i-1} v(i,k)v(j,k) \right\}^{1/2} \quad : j = i+1, i+2, \dots, P$$

v. Estabeleça $i = i + 1$ e calcule:

$$v(i,i) = \left\{ c_x(i,i) - \sum_{k=1}^{i-1} v^2(i,k) \right\}^{1/2}$$

vi. TESTE: se $i < P$ então volte ao passo iv, caso contrário calcule os valores intermediários:

$$y(i) = \frac{1}{v(i,i)} \left\{ c_x(0,i) - \sum_{k=1}^{i-1} v(i,k)y(k) \right\}$$

$$\text{em que: } y(1) = \frac{-c_x(0,1)}{v(1,1)} \quad e \quad i = 2, 3, \dots, P$$

vii. Calcule os valores a_k :

$$a_k = \frac{1}{v(k, k)} \left\{ y(k) - \sum_{j=k+1}^P v(j, k) a_j \right\}$$

em que: $a_P = \frac{y(P)}{v(P, P)}$ e $k = P-1, P-2, \dots, 1$

viii. Calcule o erro de predição mínimo:

$$\xi_{MIN} = c_x(0,0) + \sum_{k=1}^P a_k c_x(0, k)$$

ix. Fim

Este método tem um desempenho muito bom para sinais que apresentam componentes senoidais, em contra partida ele é mais lento do que o método anterior.

5. Exemplo de aplicação

As figuras 2 e 3 mostram os espectros densidade de potência calculados utilizando os métodos de autocorrelação, com janela de hanning, e o de covariância para um sinal composto por três senóides de frequências 100, 200 e 300 Hz contaminado com uma seqüência de ruído branco. A figura 2 mostra o espectro densidade de potência utilizando 25 amostras do sinal e a figura 3 utilizando 50 amostras. Observe que o método de covariância apresentou melhores resultados que o método de autocorrelação para um número pequeno de amostras ($N = 25$). No segundo caso, para $N = 50$, os métodos apresentam resultados equivalentes, porém o método de covariância apresentou picos mais agudos.

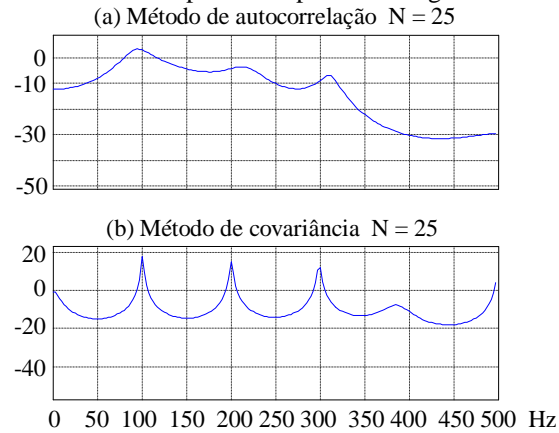


Figura 2: Estimação espectral paramétrica para $N = 25$.

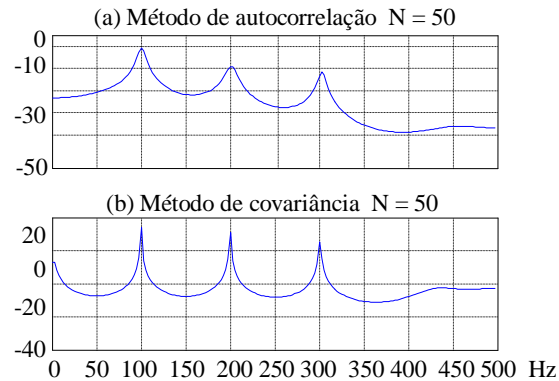


Figura 3: Estimação espectral paramétrica para $N = 50$.