ESTIMAÇÃO ESPECTRAL PARAMÉTRICA

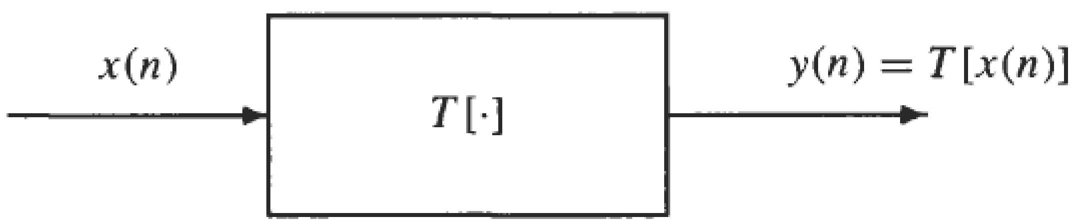
Roteiro

- Sistemas Discretos no Tempo
- Convolução
- Transformadas
  - Transformada Discreta de Fourier
  - Transformada z
- Estimação Espectral Paramétrica

Sistema Discreto no Tempo

- É um operador matemático que transforma um sinal (a entrada) em outro sinal (a saída) por meio de uma série de regras fixas ou operações.

- A notação T [.] é usada para representar um sistema genérico no qual um sinal de entrada x(n) é transformado num sinal de saída y(n) através da operação T [.]



- As propriedades entrada-saída de um sistema podem ser especificadas de várias maneiras, por exemplo:

$$y(n) = x^2(n) \qquad\qquad y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

Sistemas Discretos no Tempo

- Também é possível descrever um sistema em termos de um algoritmo que provê uma sequência de instruções ou operações que devem ser aplicadas ao sinal de entrada. Por exemplo:

$$y_1(n) = 0.5y_1(n-1) + 0.25x(n)$$
$$y_2(n) = 0.25y_2(n-1) + 0.5x(n)$$
$$y_3(n) = 0.4y_3(n-1) + 0.5x(n)$$
$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n)$$

- Em alguns casos, um sistema pode ser convenientemente especificado em termos de uma tabela, que define o conjunto de todos os possíveis pares entrada-saída de interesse.

- Sistemas discretos no tempo podem ser classificados segundo as propriedades que possuem. As mais comuns e que são de nosso interesse incluem a linearidade, a invariância de deslocamento, causalidade, estabilidade e invertibilidade
  - Serão descritas após o tópico seguinte.

Representação de Sinais Discretos no Tempo por Impulsos

- Seja um sinal arbitrário x(n) representado por um somatório de impulsos unitários, onde k representa o atraso da sequência de impulsos:

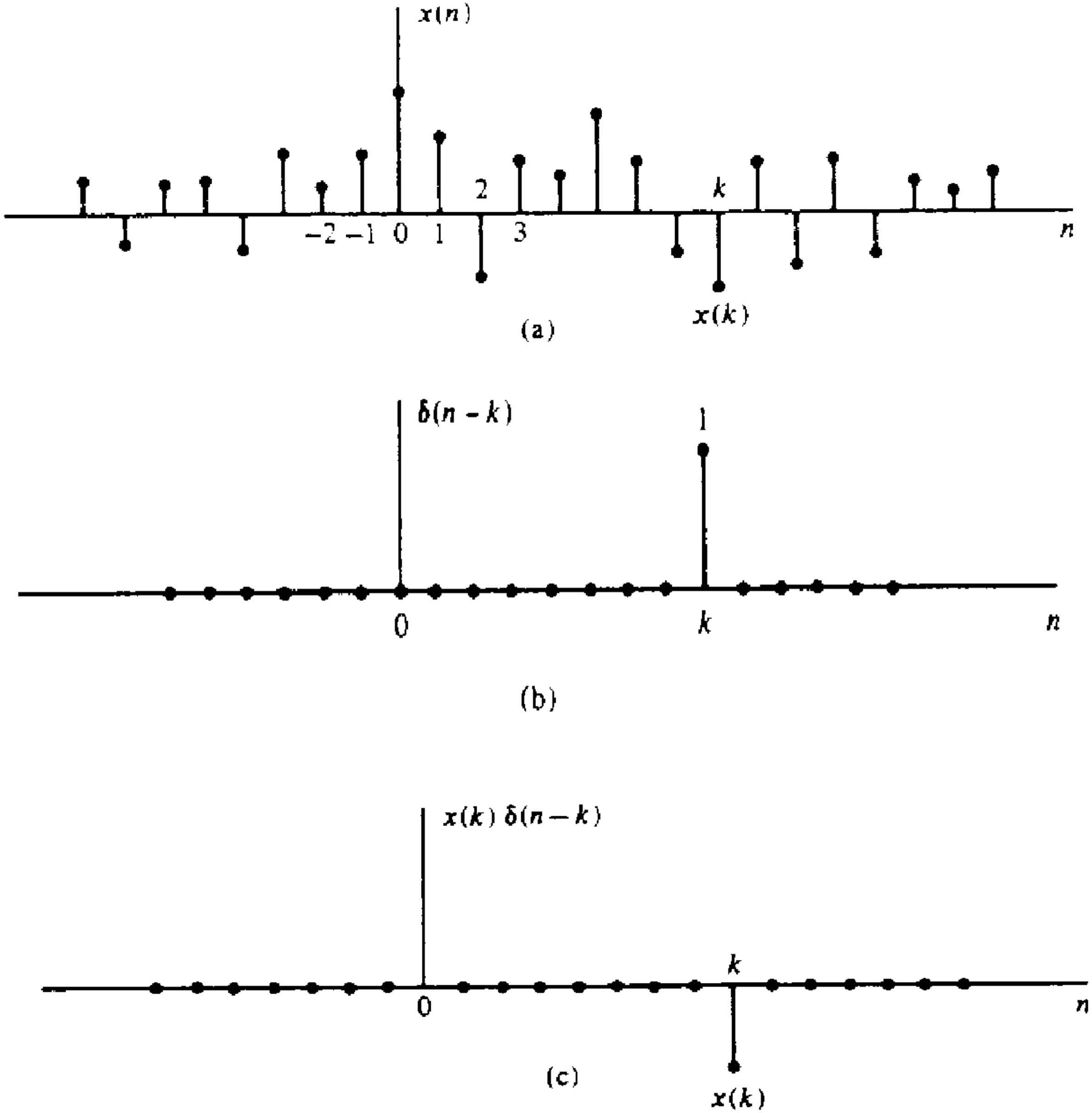
$$x_k(n) = \delta(n-k)$$

  - Idealmente, para que um sinal arbitrário x(n) tenha valores não nulos ao longo de uma duração infinita, é necessário que o conjunto de impulsos unitários seja infinito, de modo a cobrir o infinito número de atrasos.

  - Suponhamos que vamos multiplicar as duas sequências, x(n) e δ(n-k). Como δ(n-k) vale zero exceto em n=k, e neste caso ele é unitário, o resultado da multiplicação é uma outra sequência que vale zero em toda a parte exceto em n=k, onde irá valer x(k)

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k)$$

Representação de Sinais Discretos no Tempo por Impulsos



Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

- Sistema Sem Memória

  - A saída, a qualquer tempo $n=n_0$ depende apenas da entrada no instante $n=n_0$.

  - Exemplos:

    - $y(n) = x^2(n)$ é sem memória porque $y(n_0)$ depende apenas de $x(n)$ a qualquer n_0.

    - $Y(n) = x(n) + x(n-1)$ não é sem memória porque a saída, para qualquer n_0, dependo da entrada tanto em n_0 quanto em n_0-1.

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

- Aditiva
  - A resposta para uma soma de entradas é igual à soma das entradas individualmente.
    - $T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$, para quaisquer sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$
- Homogeneidade
  - Escalonar a entrada por uma constante resulta em escalonar a saída pela mesma constante.
  - Um sistema é dito homogêneo se $T[c\,x(n)] = c\,T[x(n)]$, para qualquer constante complexa c e para qualquer sequência de entrada $x(n)$

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

- Linearidade

  - Se um sistema é aditivo e homogêneo ele é dito *linear*.

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$$

    - P/ quaisquer entradas $x_1(n)$ e $x_2(n)$ e constantes complexas a_1 e a_2.

- A linearidade simplifica o cálculo da resposta sistêmica a uma dada entrada

- Existem dois métodos básicos para análise da resposta de um sistema linear a um dado sinal de entrada

  - **1. Solução direta da relação 'entrada-saída'** (F[.] = 'função do que está entre colchetes'):

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N), x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$$

    - Para sistemas LTI (lineares invariantes no tempo) veremos que:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

a_k e b_k são constantes independentes de x(n) e y(n)

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

- 2. **O segundo método tem duas etapas**
  - Decomposição ou solução do sinal de entrada em termos de um soma de sinais elementais. Estes sinais são selecionados de modo que a resposta do sistema a cada componente destes sinais seja determinada facilmente.
  - Usando a propriedade da linearidade do sistema, as respostas do sistema aos sinais elementares são somadas para se obter a resposta total do sistema a um dado sinal de entrada.
  - Exemplo: $x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$ onde $\{c_k\}$ são o conjunto de amplitudes (coeficientes de ponderação) na decomposição do sinal x(n).
    - Sendo a resposta do sistema ao sinal elementar $x_k(n)$ igual a $y_k(n)$, então $y_k(n) \equiv T[x_k(n)]$ assumindo que a resposta a $c_k x_k(n)$ é $c_k y_k(n)$, como consequência da propriedade de escalonamento.

Continua ->

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

- Finalmente, usando a propriedade aditiva, a resposta total à entrada x(n) é:

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_k c_k x_k(n)\right]$$

$$= \sum_k c_k \mathcal{T}[x_k(n)]$$

$$= \sum_k c_k y_k(n) \qquad \omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

❖ Obs.: Se o sinal de entrada x(n) for periódico com período N, o conjunto matematicamente conveniente para sinais elementares é o conjunto de exponenciais: $x_k(n) = e^{j\omega_k n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$ onde as frequências $\{\omega_k\}$ são harmonicamente relacionadas, ou seja $\omega_k = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$.

- ➢ $2\pi/N$ é chamada de *frequência fundamental*, e todos as componentes de mais alta frequência são múltiplos da frequência fundamental.

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

❖ Invariância ao Deslocamento

- Seja y(n) a resposta de um sistema a uma entrada arbitrária x(n). O sistema é dito invariante ao deslocamento se, para qualquer atraso n_0, a resposta $x(n-n_0)$ for $y(n-n_0)$. As propriedades e características de tal sistema não mudam com o tempo.
  - Caso contrário, o sistema é dito 'variante ao deslocamento'

❖ Sistema invariante ao deslocamento linear

- É o sistema que é, simultaneamente, linear e invariante ao deslocamento (LSI, *linear shift-invariant*).
- Se h(n) é a resposta de um sistema LSI ao impulso unitário $\delta(n)$, sua resposta ao impulso $\delta(n - k)$ será $h(n – k)$. Portanto,

$$h_k(n) = h(n-k) \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \qquad y(n) = x(n) * h(n)$$

Propriedades dos Sistemas Discretos no Tempo

❖ Causalidade

- Um sistema é dito causal se, para qualquer n_0, sua resposta no tempo n_0 depender somente da entrada até o tempo $n=n_0$.

- Para um sistema causal, mudanças na saída não podem preceder a mudanças na entrada. Assim, se $x_1(n)=x_2(n)$ para $n \leq n_0$, $y_1(n)$ deve ser igual a $y_2(n)$ para $n \leq n_0$.

- Sistemas causais são também chamados de 'não antecipatórios'.

- Um sistema LSI será causal se e somente se $h(n)$ for igual a zero para $n < 0$.

Estabilidade

- Em muitas aplicações, é importante que a resposta y(n) seja limitada em amplitude sempre que a entrada seja limitada. Um sistema com esta propriedade é dito 'estável' no sentido '*input-bounded output bounded, BIBO*'
    - O sistema é dito estávél no sentido BIBO se, para qualquer entrada limitada, $|x(n)| \leq A < \infty$, a saída será limitada, $|y(n)| \leq B < \infty$

❖ Invertibilidade

- Esta propriedade é importante em aplicações de equalização de canal e de-convolução.

- Um sistema é dito invertível se a entrada puder ser unicamente determinada pela saída. Para tanto, é necessário que entradas distintas produzam saídas distintas. Em outras palavras, dadas quaisquer duas entradas $x_1(n)$ e $x_2(n)$, com $x_1(n) \neq x_2(n)$, necessariamente é verdade que $y_1(n) \neq y_2(n)$.

- Exemplo: $y(n) = x(n).g(n)$ é invertível se e somente se $g(n) \neq 0$. Em particular, dado $y(n)$ com $g(n)$ não nulo, $x(n)$ pode ser recuperado por:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}$$

Convolução

- A relação entre a entrada de um sistema linear invariante ao deslocamento, x(n) e a saída, y(n), é dada pelo somatório da convolução:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- A convolução, um operador linear, é fundamental para análise e descrição de sistemas LSI e, portanto, também entra no escopo desta revisão.

- **Comutativa**

  - A ordem na qual duas sequências são convoluídas não importa

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Do ponto de visto sistêmico, essa propriedade estabelece que um sistema com uma resposta impulsiva h(n) e entrada x(n) se comporta exatamente igual a um sistema com resposta unitária x(n) e entrada h(n).

Propriedades da Convolução

❖ **Associativa**

$$\{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}$$

➢ Do ponto de vista sistêmico, essa propriedade estabelece que se dois sistemas com respostas impulsivas $h_1(n)$ e $h_2(n)$ são conectados em cascata, um sistema equivalente é aquele com resposta impulsiva igual à convolução entre $h_1(n)$ e $h_2(n)$

$$h_{eq}(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

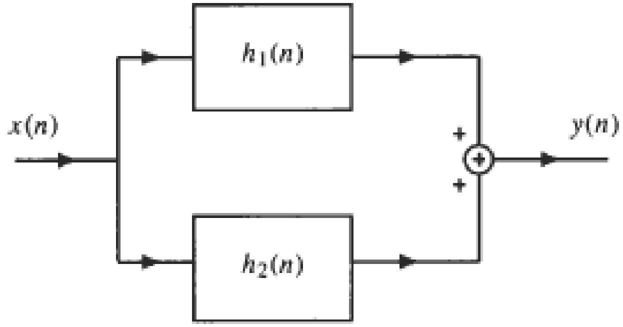
(*b*) The associative property.

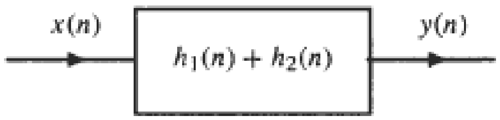
Propriedades da Convolução

❖ Distributiva

$$x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

➢ Do ponto de vista sistêmico, essa propriedade estabelece que se dois sistemas com respostas impulsivas $h_1(n)$ e $h_2(n)$ são conectados em paralelo, um sistema equivalente é aquele que tem resposta impulsiva igual à soma de $h_1(n)$ com $h_2(n)$.





❖ Cálculo Direto

- Se as sequências de sinais convoluídos forem descritas por expressões matemáticas simples, o cálculo da convolução é realizado a partir de:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Expressões úteis para séries encontradas comumente:

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$

Operação da Convolução

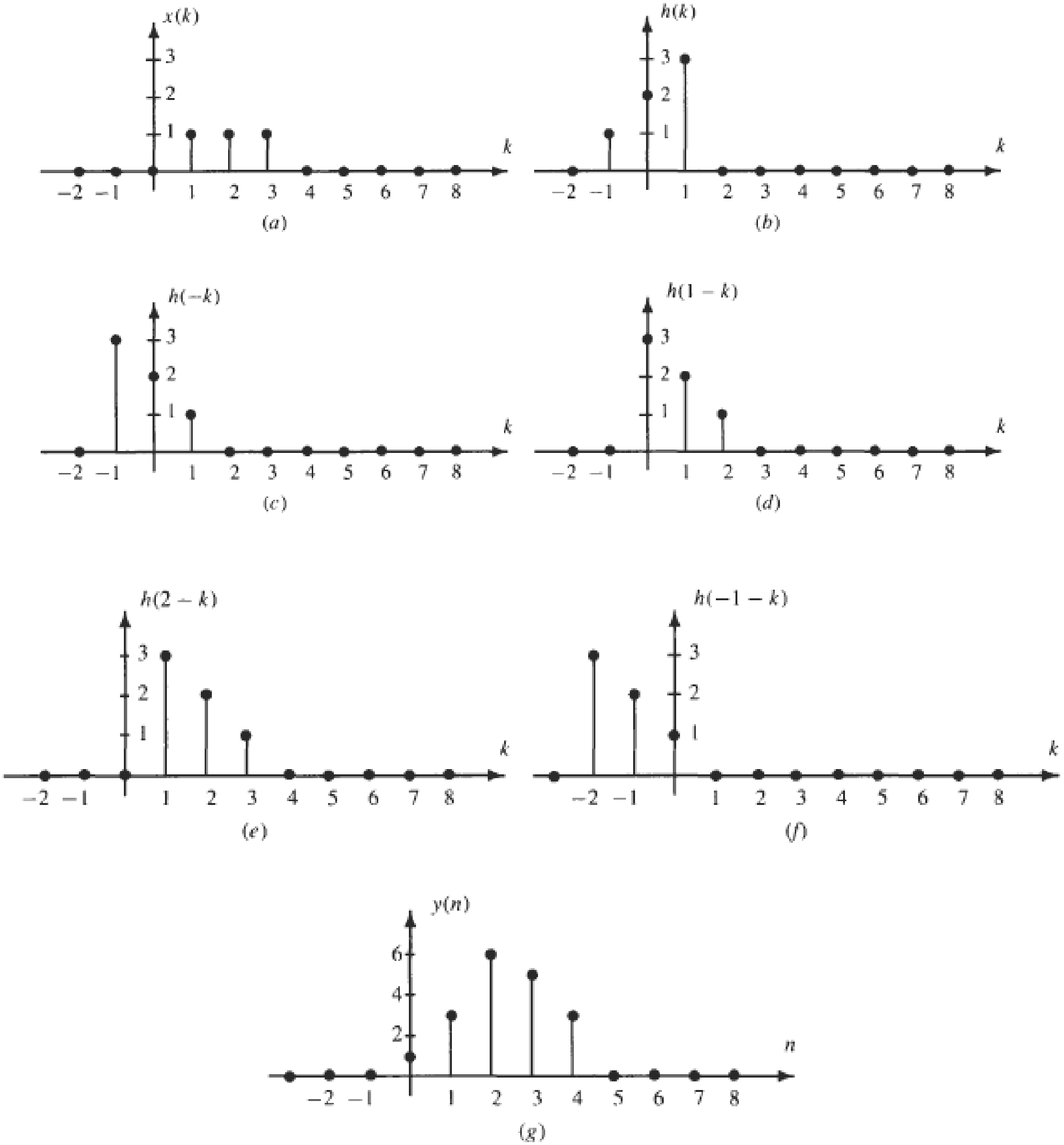
- **Aproximação gráfica**

  - Além do método direto, a convolução pode ser realizada graficamente. Os passos são:

    - Plotar as duas sequências, x(k) e h(k), como funções de k.
    - Escolher uma das sequências, por exemplo, h(k), e revertê-la no tempo para formas a sequência h(-k)
    - Deslocar a sequência reversa de n. [Nota: se n>0, isso corresponde a deslocar para a direita (atraso), enquanto para n<0, corresponde a um deslocamento à esquerda (avanço)]
    - Multiplicar as duas sequências x(k) e h(n-k) e somar o produto para todos os valores de k. O valor resultante será igual a y(n). Esse processo é repetido para todos os possíveis deslocamentos, n.

Operação da Convolução

❖ **Aproximação gráfica**



Transformada z

- De grande importância na análise de sinais digitais, aplica-se a sinais discretos tais como aqueles advindos da conversão analógico-digital.
  - De fato, para análise de sinais discretos no tempo e sistemas discretos LTI, a transformada z tem um papel semelhante ao da transformada de Laplace na análise de sinais contínuos e sistemas contínuos LTI.
- É utilizada no projeto de filtros e sistemas de controle digitais.
- Define como construir uma função a partir de uma sucessão.
  - Cada sucessão é transformada numa função;
    - isso permitirá transformar equações diferenciais em equações algébricas que em alguns casos podem ser resolvidas facilmente.

Transformada de Laplace

- Em homenagem a Pierre-Simon Laplace, é um amplamente utilizada em matemática e engenharia elétrica e transforma uma função do tempo em função da frequência complexa.

- A transformada de Laplace inversa assume uma função de domínio de frequência complexa e produz uma função definida no domínio do tempo.

- A transformada de Laplace está relacionada com transformada de Fourier, mas a transformada de Fourier expressa uma função ou sinal como uma superposição de funções senoidais, a transformada de Laplace exprime a função, mais genericamente, como uma superposição de momentos.

  - (um momento é uma medida quantitativa específica, utilizada em mecânica e estatística, na forma de um conjunto de pontos).

- Dada uma descrição matemática ou funcional simples de uma entrada ou saída de um sistema, a transformada de Laplace fornece uma descrição funcional alternativa que muitas vezes simplifica o processo de analisar o comportamento do sistema, ou em sintetizar um novo sistema baseado num conjunto de especificações.

Transformadas de Fourier

- A transformada de Fourier (Jean-Baptiste Joseph Fourier) é uma transformada integral que expressa uma função em termos de funções de base senoidal, i.e., como soma ou integral de funções senoidais multiplicadas por coeficientes ("amplitudes").

- Existem diversas variações diretamente relacionadas desta transformada, dependendo do tipo de função a transformar. A transformada de Fourier pode ser vista como um caso particular da transformada Z.

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- A análise de frequência de um sinal discreto no tempo {x(n)} é geralmente realizada por uma DSP. Para tanto, convertemos a sequência no domínio do tempo para seu equivalente no domínio da frequência.

- A transformada de Fourier de {x(n)} é X(ω). Porém, X(ω) é uma função contínua da frequência é seu cálculo computacional pode não ser conveniente.

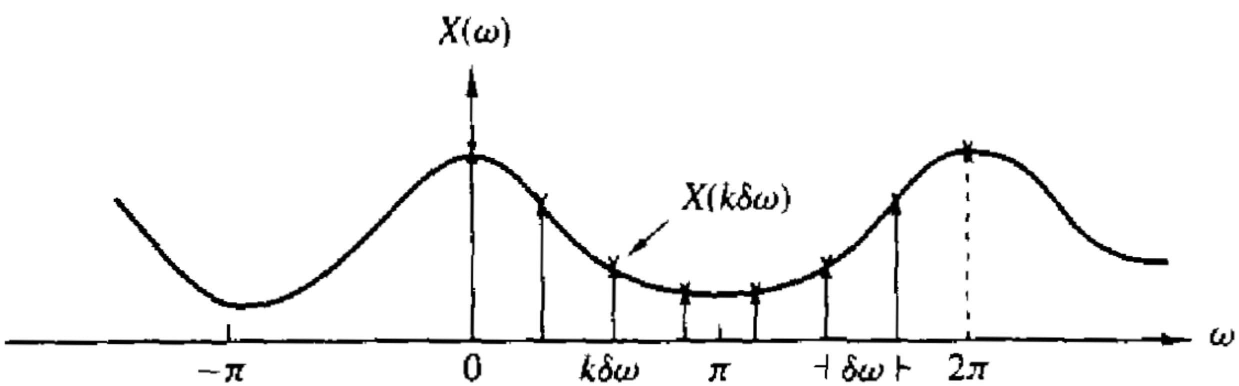
- A solução é adotar uma representação de amostras de X(ω): a transformada discreta de Fourier.

Amostragem no Domínio da Frequência

- Sinais aperiódicos com energia finita têm espectro contínuo. Seja, portanto:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- Supondo que amostramos X(ω) periodicamente a intervalos de δω radianos por segundo entre amostras sucessivas. Como X(ω) é periódico com período 2π, apenas amostras na faixa da frequência fundamental são necessárias. Por conveniência, tomamos N amostras equidistantes em intervalos 0 ≤ ω < 2π.



Amostragem no Domínio da Frequência

- Em $\omega = 2\pi k/N$, teremos:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

- O somatório acima pode ser subdividido em infinitos somatórios, cada um contendo N termos:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \cdots$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

Amostragem no Domínio da Frequência

- Se mudarmos o índice no somatório interno de n para $n\text{-}lN$ e trocarmos a ordem do somatório, obteremos, para k = 0, 1, 2, ..., N-1:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right]e^{-j2\pi kn/N}$$

- O sinal

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

  - Obtido pela repetição periódica de x(n) a todas a N amostras, é periódico com período fundamental N. Consequentemente, pode ser expandido como uma série

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  - Com coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Amostragem no Domínio da Frequência

- Por comparação das equações anteriores, chegamos a:

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

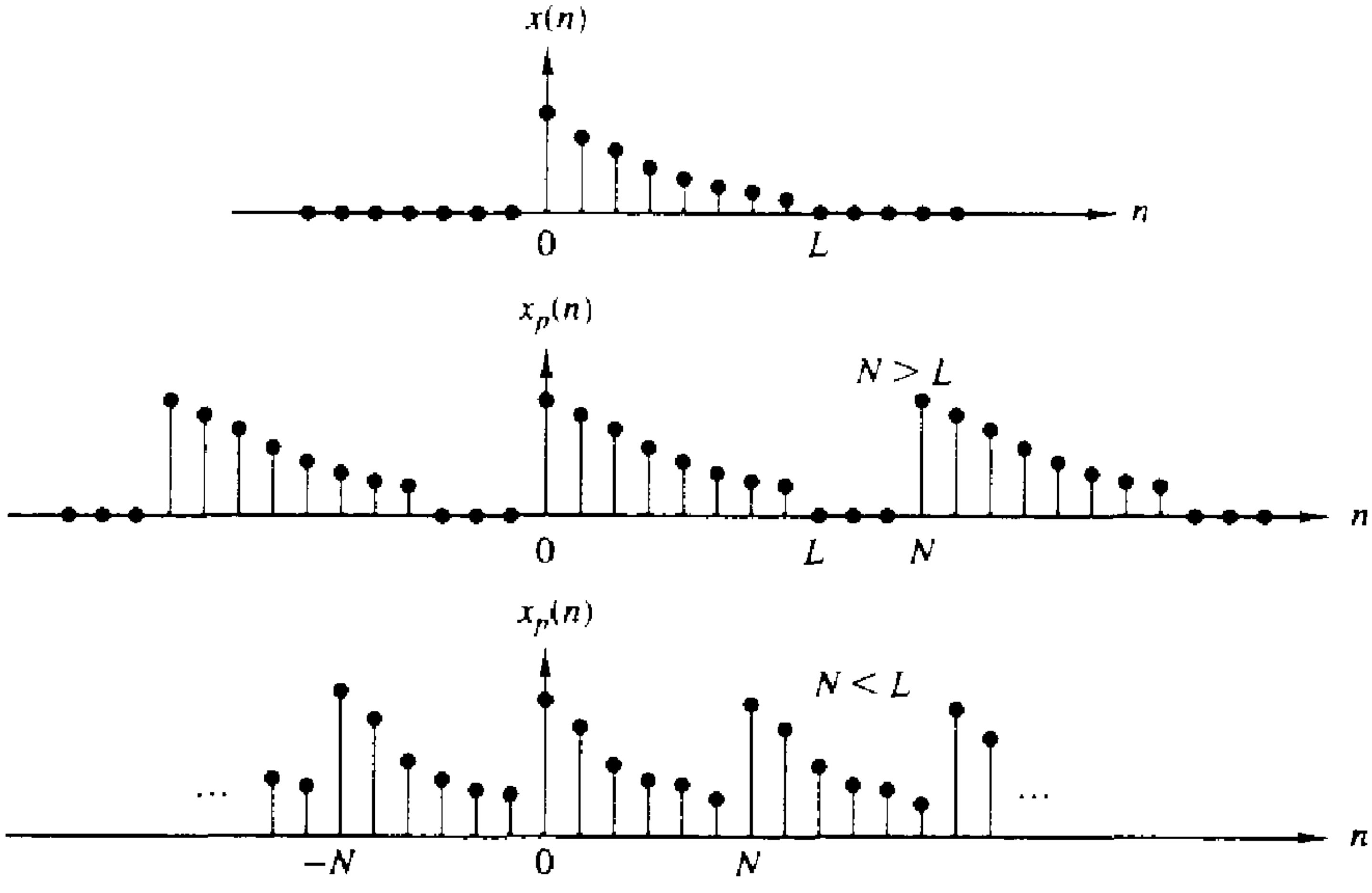
- Portanto

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

  - A relação acima provê a reconstrução do sinal periódico $x_p(n)$ a partir das amostras do espectro $X(\omega)$. Porém, para recuperar $X(\omega)$ ou $x(n)$ é preciso considerar a relação entre $x_p(n)$ e $x(n)$.
  - Como $x_p(n)$ é a extensão periódica de $x(n)$, a recuperação ocorrerá se $x(n)$ for limitada num tempo menor que o período N de $x_p(n)$. Esta situação é ilustrada no slide seguinte.

Amostragem no Domínio da Frequência

- Sequência aperiódica x(n) de comprimento L e sua extensão periódica para N ≥ L (*no-aliasing*) e N < L (*aliasing*)



Transformada Discreta de Fourier

- Vimos a amostragem no domínio da frequência de uma sequência aperiódica com energia finita x(n). Em geral, as amostras igualmente espaçadas $X(2\pi k/N)$, k = 0, 1, ..., N-1, não representam unicamente a sequência original x(n) quando x(n) tem duração infinita. Elas correspondem à sequência periódica $x_p(n)$ de período N, onde $x_p(n)$ é uma versão 'alisada' de x(n).

- Quando a sequência x(n) tem duração finita de comprimento L ≤ N, então $x_p(n)$ é simplesmente uma repetição periódica de x(n), onde $x_p(n)$ sobre um único período é dado por

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & L \le n \le N-1 \end{cases}$$

- Consequentemente, as amostras de frequência $X(2\pi k/N)$, k = 0, 1, .., N-1 representam unicamente a sequência de duração finita x(n).

Transformada Discreta de Fourier

- Em resumo, x(n) tem uma transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j\omega n} \qquad 0 \le \omega \le 2\pi$$

$$X(k) \equiv X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

- Esta é a fórmula para transformarmos a sequência {x(n)} de comprimento L ≤ N numa sequência de amostras de frequência [X(k)] de comprimento N. Como as amostras de frequência são obtidas pela transformada de Fourier de X(ω) com um conjunto de N frequências igualmente espaçadas, esta relação é chamada de transformada discreta de Fourier (DFT).

IDFT

- Para recuperarmos a sequência x(n) a partir das amostras de frequência usamos a transformada discreta de Fourier inversa:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

- Em resumo:

DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Fast Fourier Transform (FFT)

- É um método eficiente para computação da DFT

- Basicamente, o problema que a DFT resolve é a computação da sequência [X(k)] de N números complexos resultando em outra sequência de dados [x(n)] de comprimento N, de acordo com a fórmula

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

  - Onde $$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

- Similarmente, a IDFT se torna:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \qquad 0 \le n \le N-1$$

Transformada z

- Usaremos a notação: e^{st}, para sinais de tempo contínuo; z^n, para sinais de tempo discreto, onde *s* e *z* são números complexos.

- Em vez de falar o porque do uso de exponenciais em sistemas do tipo LTI (linear invariante no tempo), vamos mostrar o que ocorre quando um desses sinais entram no sistema.

- Seja $x(t) = e^{st}$ a entrada e $h(t)$ a resposta ao impulso de tal sistema LTI.

- Da convolução, sabemos: $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho)x(t-\rho)\,d\rho$$

- Fazendo as substituições:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho)e^{s(t-\rho)}d\rho$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho)e^{st}e^{s\rho}d\rho$$

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho)e^{-s\rho}d\rho$$

Transformada z

- Seja a função $$A(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho) e^{-s\rho} d\rho$$

- Do cálculo integral, por h(t) ser uma resposta ao impulso e como o módulo da função exponencial é um número real, a integral converge. Assim, a função A(s) existe, e é uma constante complexa que depende de s.

- Assim, a saída do sistema pode ser escrita como:

$$y(t) = A(s)e^{st}$$

- Observando a equação anterior vemos que: A resposta do sistema para uma entrada exponencial, é essa mesma entrada mudada de um fator A(s). Ou seja, ocorre uma mudança de amplitude.

- A(s) é chamado de *autovalor* e o sinal é uma *autofunção* do sistema.

- Conclusão importante: exponenciais complexas são autofunções de sistemas do tipo LTI.

Transformada z

- Analogamente, para o caso discreto

$$x[n] = z^n$$

Definição de convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]x[n-k]$$

Substituindo os valores:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]z^{n}z^{-k}$$

$$y[n] = z^n \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]z^{-k}$$

Autovalor no caso discreto:

$$A[z] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h[k]z^{-k}$$

Transformada z

- Transformada Z converte um sinal discreto no tempo, que é uma sequência de números complexos ou reais, numa representação complexa no domínio da frequência.

- Pode ser considerada como uma transformada de Laplace equivalente discreta no tempo.

Transformada z

- A transformada Z é o equivalente da transformada de Laplace para sistemas discretos
- A transformada Z de um sinal $x[n]$ é definida por:

$$X[z] \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

- A transformada Z inversa de $X[z]$ é dada por:

$$x[n] \;=\; \frac{1}{2\pi j}\oint X[z]z^{n-1}dz$$

  - Essa integral é uma integral de contorno na direção anti-horária em um caminho fechado no plano complexo

- Simbolicamente, o par de transformadas é representado por:

$$X[z] \;=\; \mathcal{Z}\{x[n]\}, \quad x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}$$

- Combinando-se estas expressões, tem-se que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{x[n]\}\} \;=\; x[n], \quad \mathcal{Z}\{\mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}\} = X[z]$$

- Uma representação bastante comum é dada por:

$$x[n] \;\Longleftrightarrow\; X[z]$$

Transformada z

- A transformada Z também é uma operação linear, ou seja, se

$$x_1[n] \iff X_1[z], \quad x_2[n] \iff X_2[z]$$

- Então

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \iff a_1 X_1[z] + a_2 X_2[z]$$

- z é uma variável complexa e a transformada pode não existir para todos os valores de z
  - Região de Convergência (RDC) é o nome da região do plano complexo para a qual a transformada Z existe

Transformada z

- A região de convergência é importante para a determinação da transformada Z inversa
- Dois sinais diferentes podem ter a mesma transformada, mas com RDCs diferentes
- Assim como foi feito para a transformada de Laplace inversa, o procedimento usual para se determinar a transformada Z inversa é utilizar uma tabela com os pares de transformadas mais comuns

Estimação Espectral Paramétrica

- Na aula anterior estudamos os métodos de estimação espectral baseados na utilização da transformada discreta de Fourier (DFT), referidos como métodos de estimação espectral clássicos para distingui-los dos métodos mais modernos.

- Nesta aula será introduzida uma abordagem alternativa, um modelo paramétrico, para descrever um processo aleatório e estimar a densidade espectral de potência.

Estimador

- Em estatística, um estimador é uma regra para calcular uma estimativa de uma determinada quantidade baseada em dados observados: assim a regra e seu resultado (a estimativa) são distinguidos.

- Existem os estimadores de ponto e estimadores de intervalo. Os estimadores de ponto produzem resultados de valor único, embora isso inclua a possibilidade de resultados de um vetor de valor único e resultados que podem ser expressos como uma única função. Com um estimador de intervalo, o resultado é uma gama de valores (ou vetores ou funções) plausíveis.

- Um "estimador " ou "ponto estimado" é uma estatística (isto é, uma função dos dados) que é utilizado para inferir o valor de um parâmetro desconhecido em um modelo estatístico. O parâmetro a ser estimado por vezes é chamado *estimando*. Ele pode ser de dimensão finita (no paramétrico e modelo semi-paramétrico), ou de dimensão infinita (não semi-paramétrico e modelo não paramétrico). Se o parâmetro é denotado θ então o estimador é normalmente escrito pela adição de um circunflexo sobre o símbolo. Sendo uma função dos dados, o estimador é em si uma variável aleatória, uma realização particular desta variável aleatória é chamada "estimativa". Às vezes, as palavras "estimador" e "estimativa" são usados alternadamente.

-

Estimador

- O problema da estimação da densidade resulta em duas aplicações.
  - Em primeiro lugar, ao estimar as funções de densidade de probabilidade de variáveis aleatórias
  - e em segundo lugar para estimar a função de densidade espectral de uma série temporal.
  - Nestes problemas as estimativas são funções que podem ser consideradas como estimativas de ponto em um espaço de dimensão infinita, e há problemas correspondentes à estimação de intervalo.
- A essência do problema de estimação espectral pode ser resumida pela seguinte frase: "A partir de uma gravação finita de uma sequência de dados estacionários, estimar como a potência total está distribuída no domínio da frequência" .

Estimação

- Há duas macro abordagens para o problema da análise espectral.
- Uma delas tem por ideia básica aplicar um filtro passa-banda de faixa estreita ao sinal estudado, varrendo toda a faixa de frequências de interesse. A potência de saída do filtro dividida pela largura de faixa do filtro é usada como uma medida do conteúdo espectral do sinal original. Este procedimento corresponde essencialmente ao que os chamados métodos "clássicos" (ou "não-paramétricos") de análise espectral fazem.
- A outra abordagem, conhecida como "paramétrica", postula um modelo para os dados, o que provê uma forma de parametrizar o espectro, consequentemente reduzindo o problema a se estimar os parâmetros para o modelo assumido.

Estimação espectral não paramétrica - periodograma

- Vantagens:
  - simplicidade.
  - a dep é facilmente calculado via DFT.
- Desvantagens:
  - Resolução de frequência baixa (N pequeno).
  - Utilização de janelas

Estimação espectral paramétrica

- Vantagens:
  - alta resolução de frequência.
  - Em alguns casos não é necessário o uso de janelas.
- Desvantagem:
  - Requer o uso algoritmos sofisticados.

Modelo de função do sistema racional

- No mundo real, muitos processos aleatórios de tempo discreto são bem aproximados por um modelo de função de transferência racional conhecido também como séries temporais.
- Modelos Autoregressive-moving-average (ARMA) são modelos matemáticos em séries temporais usados em diversas aplicações.
- Modelos ARMA podem ser usados para predizer o comportamento de uma série temporal a partir de valores passados, somente. Tal predição pode ser usada como base para o cálculo da possível importância de outras variáveis do sistema.
- Modelos ARMA são amplamente usados para predições econômicas e produção industrial.

Séries temporais

- Uma série temporal é uma sequência de observações sobre uma variável de interesse. A variável é observada em pontos temporais discretos, usualmente equidistantes, e a análise de tal comportamento temporal envolve a descrição do processo ou fenômeno que gera a sequência.
- Padrões de Séries Temporais
  - Processamentos que permanecem constantes sobre um certo nível todo o tempo, com variações de período a período devido a causas aleatórias.
  - Padrões que ilustram tendências no nível dos processos, de maneira que a variação de um período ao outro é atribuída a uma tendência mais uma variação aleatória.
  - Processos que variam ciclicamente no tempo, como em processos sazonais (exemplo: o clima).

Séries Temporais

- Modelos de Previsão

  - Os procedimentos de previsão de séries temporais podem ser divididos, grosseiramente, em duas categorias:

    - Automáticos, que são aplicados diretamente, com a utilização de programas simples de computador;

    - Não-Automáticos, que exigem a intervenção de pessoal especializado, para serem aplicados

ARMA

- Neste modelo a sequência de dados x(n) é descrita pela seguinte equação de diferenças com coeficientes constantes:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{Q} b_k u(n-k) \qquad (1)$$

- em que u(n) é a sequência de excitação da entrada.

- Este é um modelo generalizado e é denominado de modelo ARMA (*AutoRegressive Moving Average*). Ele corresponde a um sistema linear invariante ao deslocamento com polos e zeros, cuja excitação de entrada é u(n). Em geral u(n) é admitido ser um ruído branco.

- A equação (1) nos mostra que x(n) consiste de duas partes: uma parte determinística determinada pelos coeficientes a_k e uma parte, em geral, aleatória que depende de u(n).

$$u(n) \longrightarrow \boxed{\quad H(z) \quad} \longrightarrow x(n)$$

Modelo de função do sistema racional

- Admite-se que o processo x(n) possa ser modelado por um sistema linear discreto no tempo tal que:

$$X(z) = H(z).U(z)$$

$$u(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x(n)$$

  - Em que U(z) é a transformada z da excitação e H(z) é a função de transferência do sistema racional:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

  - Em geral os coeficientes b_k e a_k são admitidos constantes.

- A correspondente equação de diferenças para o sistema é:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{Q} b_k u(n-k)$$

- A equação acima nos mostra que x(n) consiste de duas partes:
  - uma parte determinística determinada pelos coeficientes a_k.
  - E uma parte, em geral, aleatória que depende de u(n).

- Admitindo que x(n) seja um processo estacionário, então, como consequência, u(n) também é estacionário e a Densidade Espectral de Potência será dada por:

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 S_{uu}(f) = \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} S_{uu}(f)$$

- Em muitas situações práticas a sequência de entrada pode ser admitida um ruído branco com valor médio nulo e variância σ_u^2:

  - Neste caso:

$$S_{uu}(f) = \sigma_u^2$$

  - Portanto, substituindo na equação anterior:

$$S_{xx}(f) = \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2}\sigma_u^2$$

    - Como a dep da excitação é constante, então a dep do sinal é uma função racional no domínio da frequência e que depende dos coeficientes a_k e b_k.

$$S_{xx}(f) = \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2}\sigma_u^2$$

- O modelo definido acima indica que o processo é gerado por um sistema linear com polos e zeros.

- Ele é conhecido como modelo ARMA(P,Q) : modelo autoregressivo com média móvel.

  - em que P (número de polos) e Q (número de zeros) são as ordens do modelo.

- A partir do modelo ARMA, outros dois modelos são identificados:

  - Modelo de média móvel MA(Q) $\rightarrow$ modelo somente com zeros (sistema FIR). FIR= Finite Impulse Response

  - Modelo autoregressivo AR(P) $\rightarrow$ modelo somente com polos (sistema IIR). IIR= Infinite Impulse Response

Filtros FIR

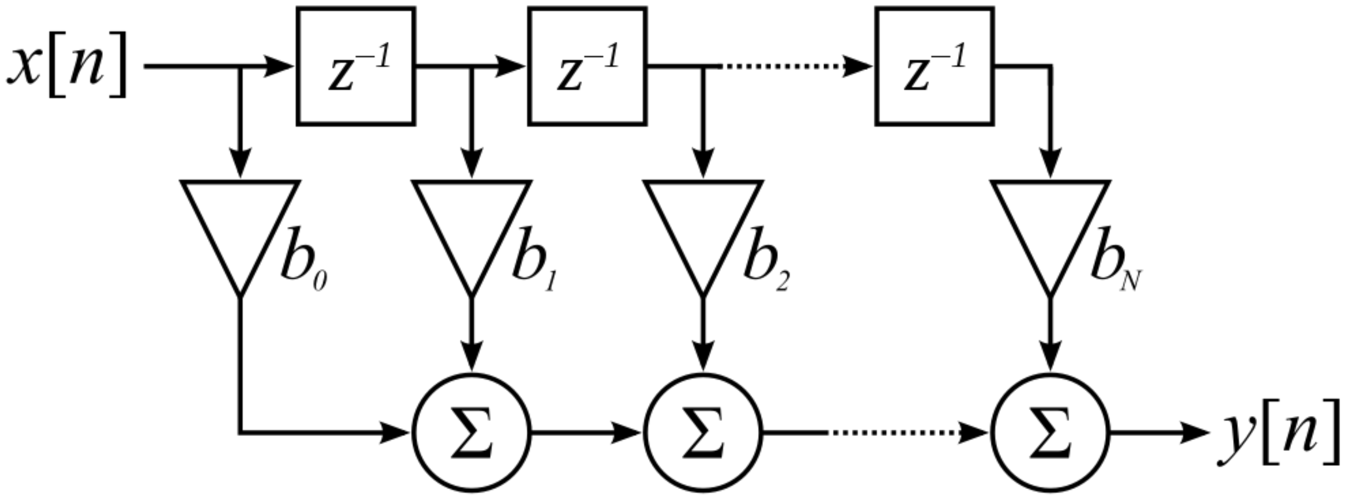
- Em processamento de sinal, em um filtro FIR (finite impulse response) a resposta impulsiva (ou resposta a qualquer entrada com duração finita) tem duração finita, porque ele se ajusta para zero num tempo finito

- Ao contrário, os filtros IIR (infinite impulse response), podem ter uma realimentação interna e podem continuar a responder indefinidamente (usualmente decaindo).

- A resposta impulsiva (isto é, a saída em resposta a uma função delta na entrada) de um filtro FIR discreto de ordem N dura exatamente N+1 amostras (do primeiro elemento não nulo até o último elemento não nulo) antes de cair para zero.

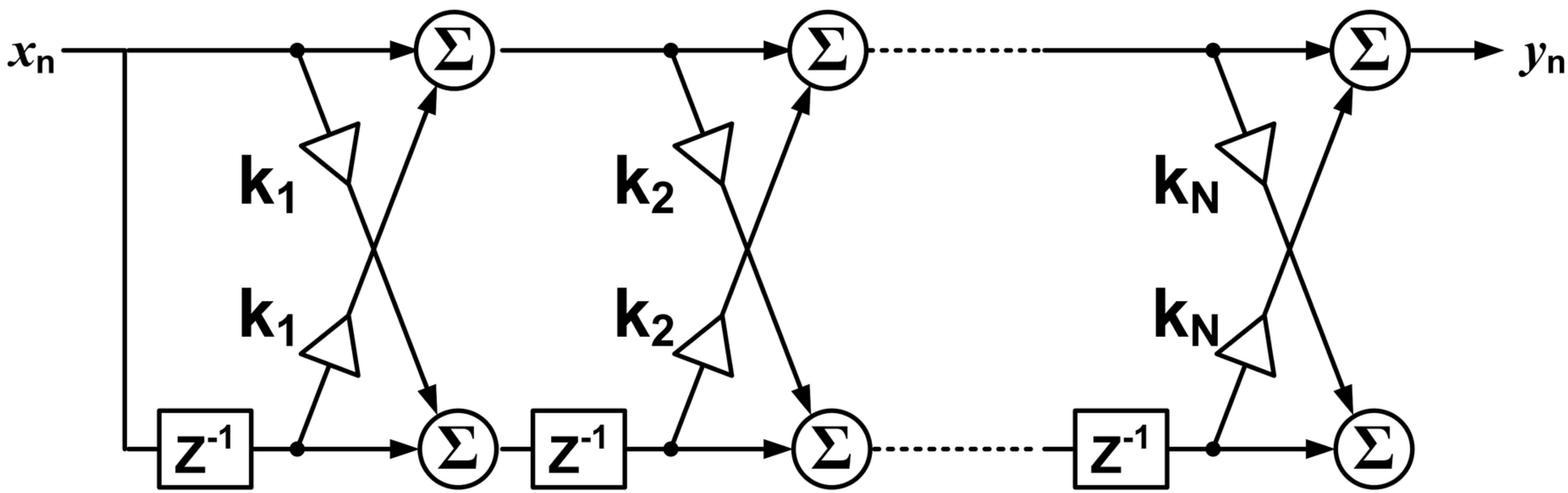
Filtros FIR

- Na figura abaixo, uma forma discreta de filtro FIR de orden N. A parte de cima é uma linha de atraso com N estágios e N+1 derivações. Cada unidade de atraso é um operador z^{-1} na notação da transformada Z.



Filtro FIR

- Uma implementação em treliça de um filtro FIR discreto no tempo de ordem N. Cada unidade de atraso é um operador z^{-1} em notação de transformada Z.



Filtros FIR - Propriedades

- Não requerem realimentação.
  - Isto significa que quaisquer erros de arredondamento não são agravados por iterações somadas. O mesmo erro relativo ocorre em cada cálculo. Isso também faz com implementação mais simples
- São inerentemente estáveis
- Pode ser projetado com a fase linear fazendo-se a sequência de coeficiente simétrica.
- Disvantagem principal: requerem mais potência computacional.
  - Entretanto, o hardware de muitos processadores é avançado o suficiente para tornar os filtros FIR aproximadamente tão eficientes quanto os IIR, para muitas aplicações.

Filtros IIR

- A resposta impulsiva infinita (Infinite impulse response, IIR) é uma propriedade que se aplica a muitos sistemas lineares invariantes no tempo. Exemplos mais comuns são os filtros digitais e eletrônicos. Sistemas com estas propriedades são conhecidos como sistemas IIR ou filtros IIR, e se distinguem por apresentar uma resposta impulsiva que não se torna nula, exatamente, passado um certo ponto, mas continua indefinidamente (em contraste aos filtros FIR).

- Na prática, a resposta dos sistemas IIR se aproxima de zero e pode ser desprezada a partir de um certo ponto. Entretanto, os sitemas físicos que geram as respostas IIR ou FIR são diferentes, por isso precisa haver a distinção entre eles.

Filtros FIR e IIR

	Filtros IIR	Filtros FIR
Fase (atraso de grupo)	Difícil de controlar, sem uma técnica particular disponível	Fase linear sempre possível
Estabilidade	Pode ser instável, pode ter ciclos limitados	Sempre estável, sem limite de ciclos
Ordem	Baixa	Mais alta
História	Derivado dos filtros analógicos	Mundo digital

- No modelo de média móvel MA(Q): P = 0, isto é, A(z) = 1, assim:

$$X(z) = B(z)U(z)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{Q} b_k u(n-k) \longrightarrow S_{xx}(f) = \left|B(f)\right|^2 S_{uu}(f)$$

- No modelo de autoregressivo AR(P): Q = 0, isto é, B(z) = 1, assim:

$$X(z) = \frac{1}{A(z)} U(z)$$

$$\longrightarrow S_{xx}(f) = \frac{1}{\left|A(f)\right|^2} S_{uu}(f)$$

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) + u(n)$$

Predição linear do modelo autoregressivo

- O problema da predição linear consiste em estimar (ou predizer) uma amostra não observada x(n), baseando-se em um conjunto de amostras observadas { x(n-1), ..., x(n-P) }.

- x(n) é estimada com base em P amostras anteriores do sinal.

- Define-se então um preditor linear como uma combinação linear de P amostras anteriores do sinal, isto é:

$$\hat{x}(n) = -a_1 x(n-1) - \cdots - a_P x(n-P) = -\sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k)$$

  - O sobrescrito “chapéu” indica amostra estimada.
  - Os coeficientes a_k são admitidos constantes.
  - O sinal negativo é utilizado por conveniência no equacionamento.
  - Existe uma diferença entre a estimativa e o valor correto da amostra. Ele é chamado de erro de predição.

- O erro de predição é definido como a diferença entre as amostras original e estimada. Assim:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k)$$

- Rearranjando a equação acima tem-se:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) + e(n)$$

  - A equação acima é idêntica à equação do modelo AR se substituirmos e(n) por u(n).
  - Podemos afirmar que os coeficientes ótimos da predição são os parâmetros do modelo AR.
  - Os coeficientes a_k são determinados pela minimização da potência do erro de predição.

Determinação dos coeficientes a_k

- Para que o erro seja mínimo, este deve ser ortogonal aos valores do sinal { x(n-k) } que entram na predição. Assim:

$$E\left[e(n)x^*(n-k)\right] = 0 \quad : k = 1, 2, \cdots P$$

$$E\left[x(n)x^*(n-k)\right] = E\left[\hat{x}(n)x^*(n-k)\right] \quad : k = 1, 2, \cdots P$$

- ***Desenvolvendo tem-se que:***

Wiener-Hopf

$$r_{xx}(k) = -\sum_{l=1}^{P} a_l r_{xx}(k-l) \quad : k = 1, \cdots, P$$

- $r_{xx}(k)$ é a função de autocorrelação do sinal.
- A equação acima é chamada de equação de Wiener-Hopf ou de Yule-Walker

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(P-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(P-1) & r_{xx}(P-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(P) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(P) \end{bmatrix}$$

- A Potência mínima do erro será:

$$\varepsilon_{MIN} = E\left[e(n)x^*(n)\right] = r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{P} a_k r_{xx}(-k)$$

- Admitindo que o erro apresente características de um ruído branco tem-se:

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{|A(f)|^2}\varepsilon_{MIN}$$

Métodos para a estimação espectral AR

- Para a solução das equações de Wiener-Hopf é necessário conhecer a matriz de autocorrelação do processo.
  - Em geral ela não está disponível.
- Na prática o que se tem disponível é uma observação dos dados com tamanho finito: { x(0), x(1), ... , x(N-1) }.
  - A função de autocorrelação deve ser estimada.
- Serão apresentados dois dos métodos principais para a estimação dos parâmetros AR.
  - Método de autocorrelação e Método de covariância.
- Eles diferem entre si pelo modo que é estimado o erro quadrático médio de predição.
  - Este por sua vez conduz a diferentes estimativas de $r_{xx}(k)$

$$r_{xx}(k) \quad ? \qquad \rightarrow \qquad \hat{r}_{xx}(k)$$

Método de autocorrelação

- Vamos admitir que se tem disponível N amostras de um processo: x(0), x(1), ..., x(N-1) :

- Define-se a seguinte estimativa do erro quadrático médio de predição:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left| x(n) + \sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) \right|^2$$

- O erro mínimo pode ser obtido derivando a equação acima e igualando o resultado a zero.

- Após alguma manipulação algébrica tem-se que:

$$\sum_{l=1}^{P} \hat{a}_l \hat{r}_{xx}(k-l) = -\hat{r}_{xx}(k) \quad : k = 1, \cdots, P$$

- A estimativa da função de autocorrelação é dada por:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \quad : k = 1, \cdots, P$$

- O erro mínimo será dado por

$$\varepsilon_{MIN} = \hat{r}_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{P} \hat{a}_k \hat{r}_{xx}(-k)$$

- Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_{xx}(0) & \hat{r}_{xx}(1) & \cdots & \hat{r}_{xx}(P-1) \\ \hat{r}_{xx}(1) & \hat{r}_{xx}(0) & \cdots & \hat{r}_{xx}(P-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{xx}(P-1) & \hat{r}_{xx}(P-2) & \cdots & \hat{r}_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}(1) \\ \hat{a}(2) \\ \vdots \\ \hat{a}(P) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{r}_{xx}(1) \\ \hat{r}_{xx}(2) \\ \vdots \\ \hat{r}_{xx}(P) \end{bmatrix}$$

- A matriz de autocorrelação é de Toeplitz, onde apresenta as seguintes propriedades:
  - É simétrica.
  - Os termos da diagonal principal são constantes.
  - Solução: algoritmo de Levinson.

Algoritmo de Levinson

1. Determine a função de autocorrelação

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \quad : k = 1, \cdots, P$$

2. Dados iniciais:

$$\hat{a}_1(1) = -\frac{\hat{r}_{xx}(1)}{\hat{r}_{xx}(0)} \qquad e \qquad \varepsilon_1 = \frac{1-\left|\hat{a}_1(1)\right|^2}{\hat{r}_{xx}(0)}$$

3. Estabeleça k = 2 e calcule:

4. Recursão de Levinson:

$$\hat{a}_k(k) = -\frac{\hat{r}_{xx}(k) + \sum_{l=1}^{k-1} \hat{a}_{k-1}(l)\hat{r}_{xx}(k-l)}{\varepsilon_{k-1}}$$

$$\hat{a}_k(i) = \hat{a}_{k-1}(i) + \hat{a}_k(k)\hat{a}_k(k-i) \quad : i = 1, 2, \cdots k-1$$

$$\varepsilon_k = \left[1 - \left|\hat{a}_k(k)\right|^2\right]\varepsilon_{k-1}$$

5. Aumente a ordem do preditor $\rightarrow$ k = k+1

6. Se k = P + 1 $\rightarrow$ FIM

   Se k $\leq$ P $\rightarrow$ VOLTE AO PASSO 4

❖ OBSERVAÇÕES:

- Se o processo é realmente auto regressivo de ordem P então a(j) = 0 para j > P.
- Se ε_{MIN} = 0 então o processo consiste somente de senóides.
- Não se recomenda o uso deste método quando se tem disponível poucas amostras do sinal.
- Quando da utilização é vantajoso utilizar uma janela de dados tipo Hamming ou uma outra qualquer diferente da retangular.

- No matlab tem-se as seguintes funções:
  - lpc.m
  - levinson.m
  - prony.m

Método de covariância

- Como anteriormente, vamos admitir também que se tem disponível N amostras de um processo: x(0), x(1), ..., x(N-1) :

- A estimativa do erro quadrático médio de predição é dada por:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{N-P} \sum_{n=P}^{N-1} \left| x(n) + \sum_{k=1}^{P} a_k x(n-k) \right|^2$$

- Seguindo o mesmo procedimento anterior tem-se que:

$$\begin{bmatrix} c_{xx}(1,1) & c_{xx}(1,2) & \cdots & c_{xx}(1,P) \\ c_{xx}(2,1) & c_{xx}(2,2) & \cdots & c_{xx}(2,P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{xx}(P,1) & \hat{r}_{xx}(P,2) & \cdots & c_{xx}(P,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}(1) \\ \hat{a}(2) \\ \vdots \\ \hat{a}(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{xx}(1,0) \\ c_{xx}(2,0) \\ \vdots \\ c_{xx}(P,0) \end{bmatrix}$$

➢ $c_{xx}(j,k)$ é conhecida como matriz de covariância do sinal tal que:

$$c_{xx}(j,k)=\frac{1}{N-P}\sum_{n=P}^{N-1}x(n-j)x(n-k) \quad : j,k=0,\cdots,P$$

➢ O erro mínimo será dado por

$$\varepsilon_{MIN}=c_{xx}(0,0)-\sum_{k=1}^{P}\hat{a}_k c_{xx}(0,k)$$

- Note que a diferença em relação ao método anterior está no estabelecimento dos limites da somatória.
- Neste caso a matriz de covariância é simétrica, mas os elementos ao longo da diagonal principal não são iguais.
- Um método eficiente para resolver o sistema é utilizar a decomposição de Cholesky, que será visto a seguir.

Algoritmo de Cholesky

1. Determine a função de covariância

$$c_{xx}(i,j) = \frac{1}{N-P}\sum_{n=P}^{N-1} x(n-i)x(n-j) \quad : i,j = 0,\cdots,P$$

Decomposição da matriz de covariância em uma matriz triangular inferior tal que: C = VV^T

2. Faça:

$$v(1,1) = \sqrt{c_{xx}(1,1)}$$

3. Estabeleça i = 1
4. Calcule:

$$v(j,i) = \frac{1}{v(i,i)}\left\{c_{xx}(i,j) - \sum_{k=1}^{i-1} v(i,k)v(j,k)\right\}^{1/2} \quad : j = i+1, i+2,\cdots P$$

5. Estabeleça i = i + 1

6. Calcule:

$$v(i,i) = \left\{ c_{xx}(i,i) - \sum_{k=1}^{i-1} v^2(i,k) \right\}^{1/2}$$

7. TESTE: se i < P então volte ao passo 4.
   Caso contrário:

8. Calcule os valores intermediários:

$$y(i) = \frac{1}{v(i,i)} \left\{ c_{xx}(0,i) - \sum_{k=1}^{i-1} v(i,k) y(k) \right\}$$

$$onde: \quad y(1) = \frac{-c_{xx}(0,1)}{v(1,1)} \quad e \quad i = 2, 3, \cdots P$$

9. Calcule os valores a_k

$$a_k = \frac{1}{v(k,k)}\left\{ y(k) - \sum_{j=k+1}^{P} v(j,k)a_j \right\}$$

$$onde: \quad a_P = \frac{y(P)}{v(P,P)} \quad e \quad k = P-1, P-2, \cdots 1$$

10. Calcule o erro mínimo de predição:

$$\varepsilon_{MIN} = c_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^{P} a_k c(0,k)$$

11. Fim

❖ OBSERVAÇÕES:

- Método bom para sinais com componentes senoidais.
- Mais lento do que o método anterior.

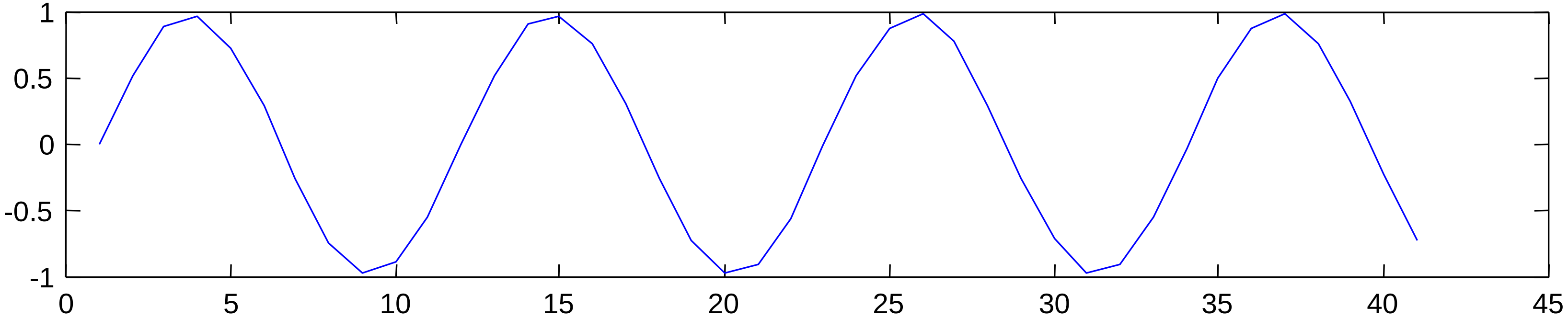
Apêndice

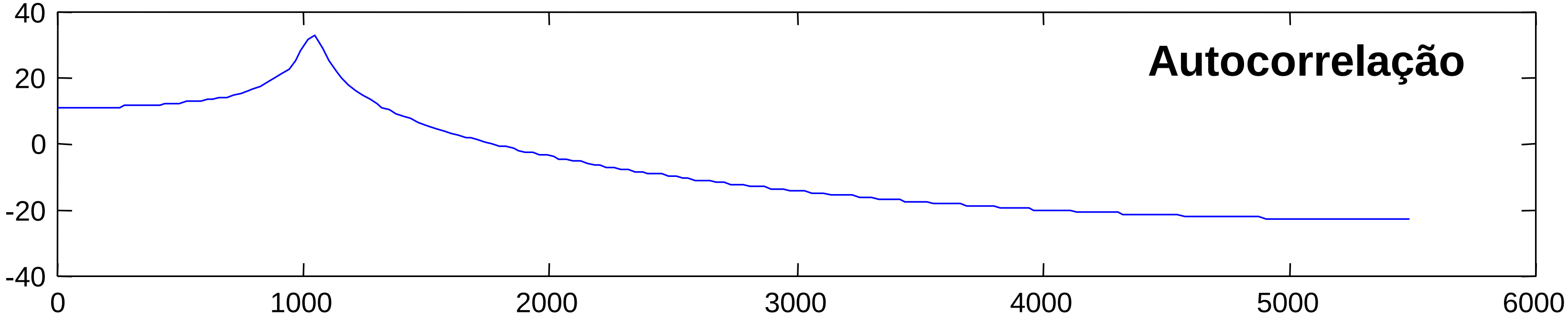
Exemplos de Aplicação

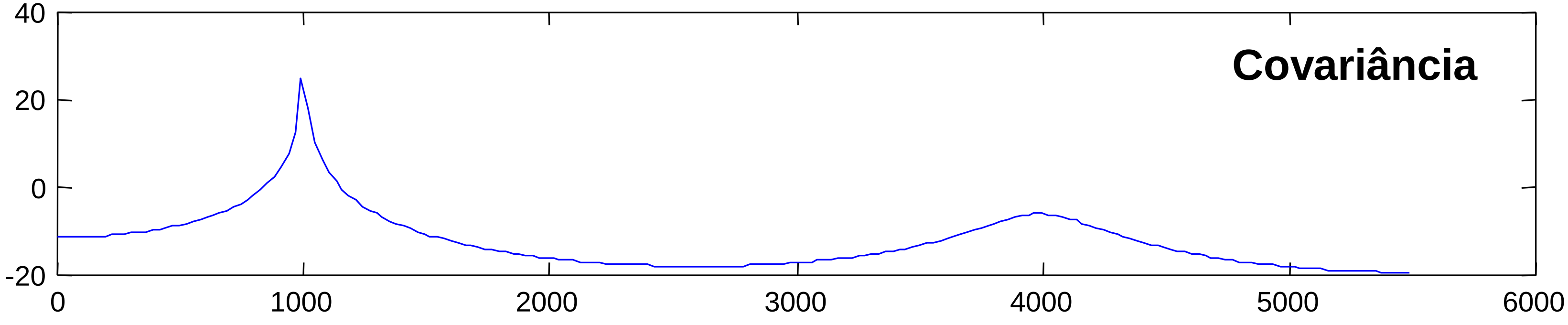
tom senoidal

frequência de amostragem: fa = 11025

ordem da análise: M = 4





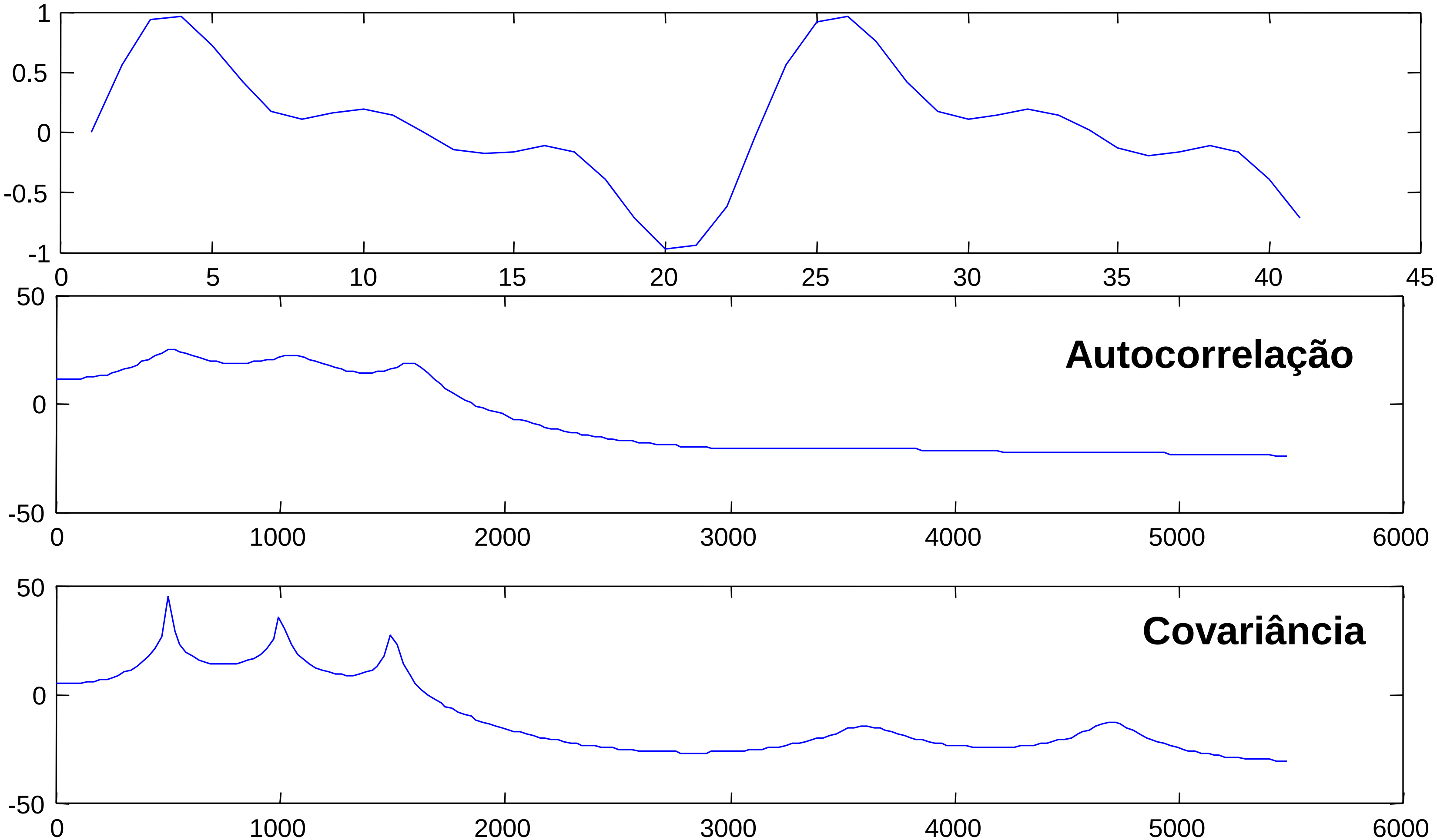


três tons senoidais

frequência de amostragem: fa = 11025

ordem da análise: M = 10

N = 40

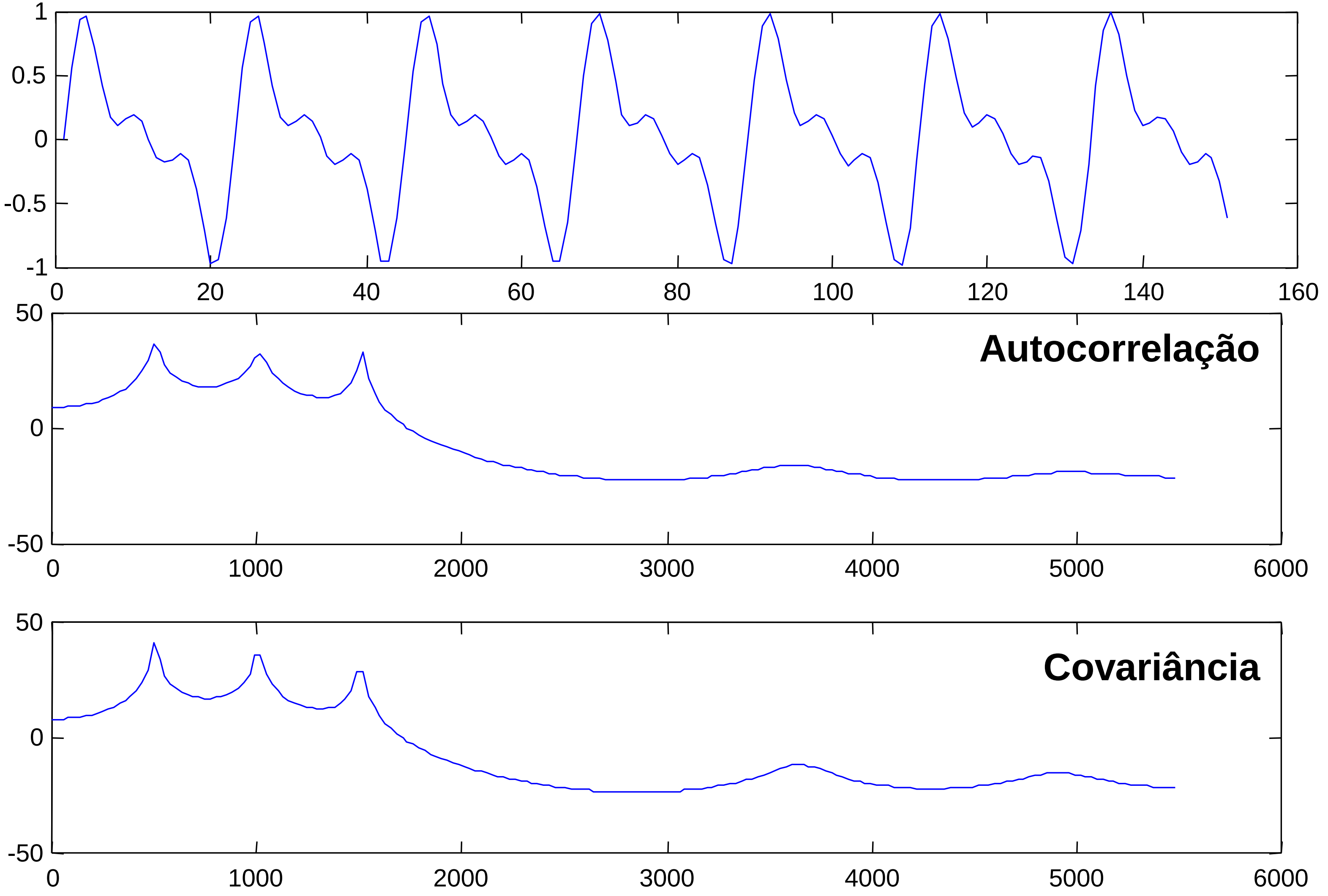


três tons senoidais

frequência de amostragem: fa = 11025

ordem da análise: M = 10

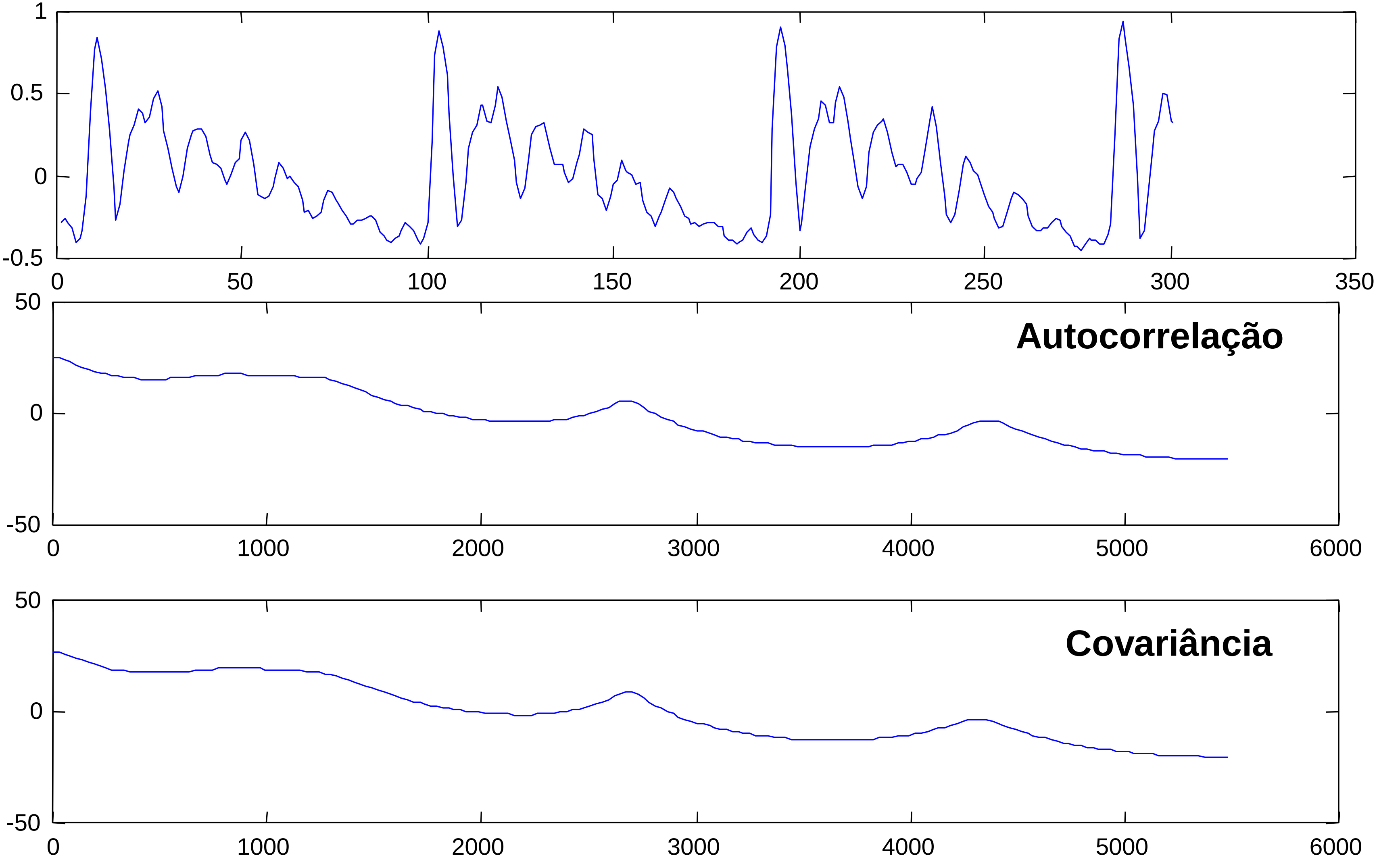
N = 150



sinal de voz

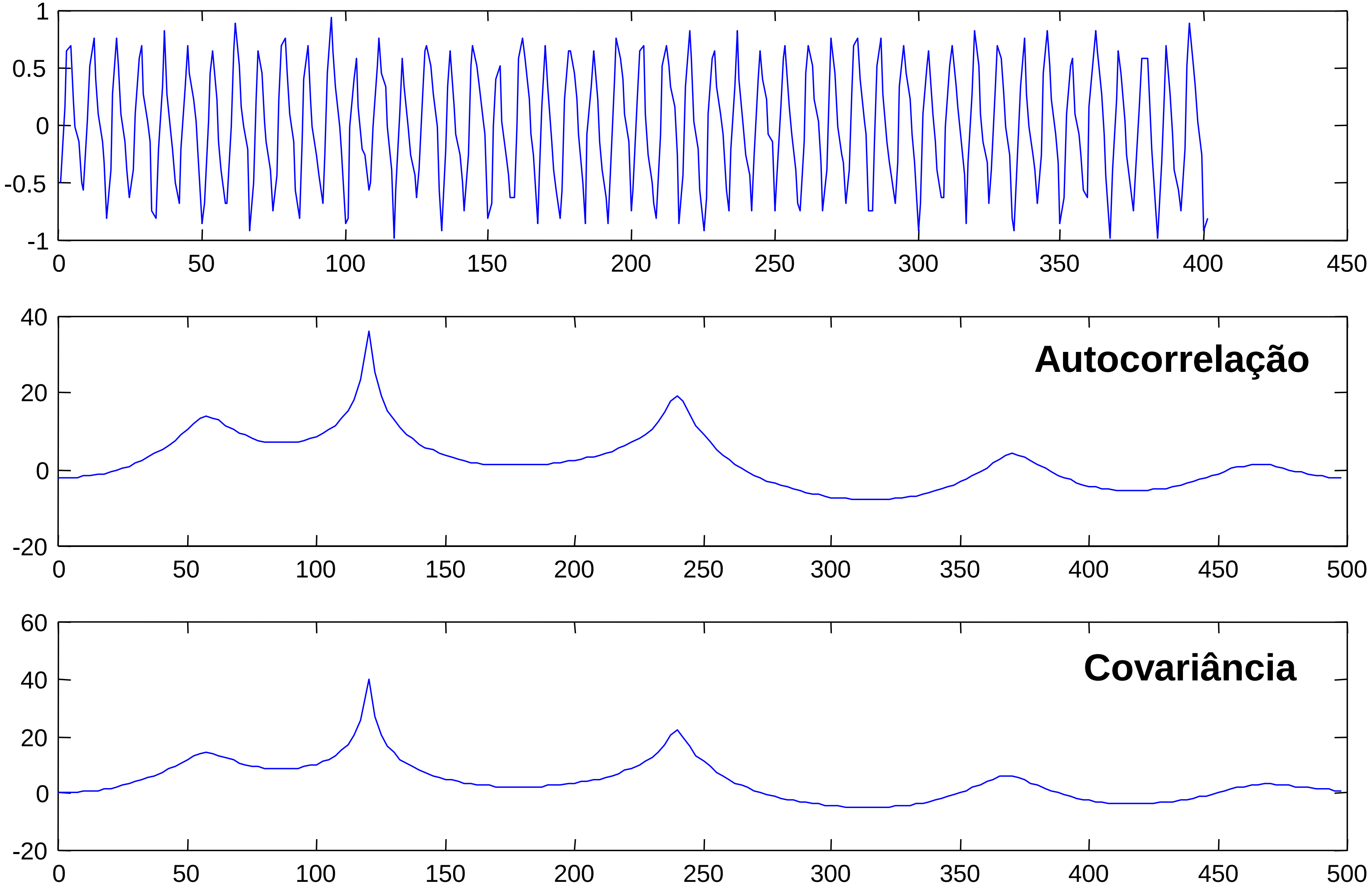
frequência de amostragem: fa = 11025

ordem da análise: M = 10

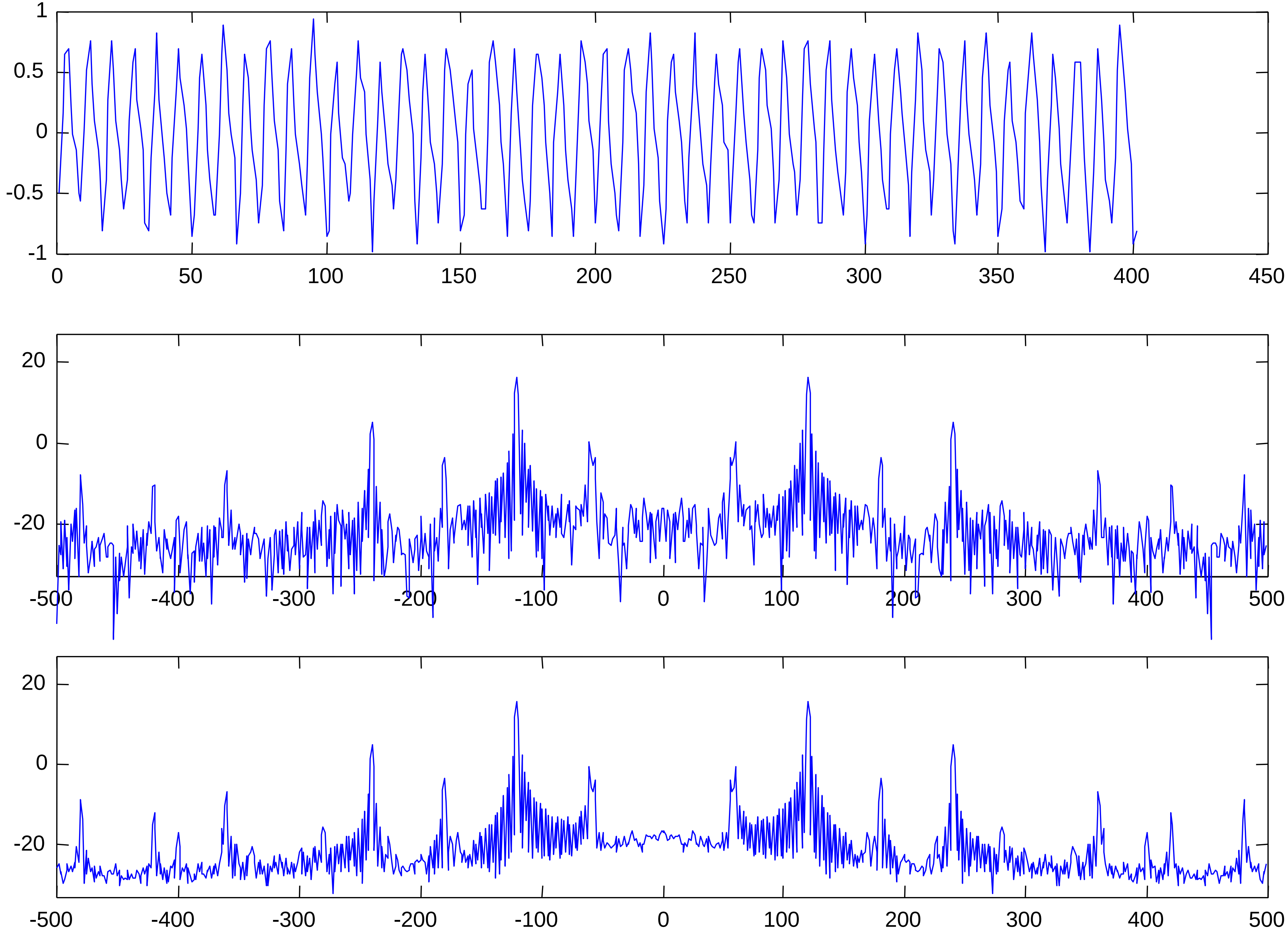


Interferência – 60 Hz

frequência de amostragem: fa = 1000
ordem da análise: M = 12



Interferência – 60 Hz - DFT



algumas aplicações

FILTROS ÓTIMOS
- Wiener
- Kalman

CODIFICAÇÃO DA VOZ
- LPC
- CELP
- RELP
- MPLPC

MODELAGEM DE SINAIS
- Voz
- Imagem
- Geofísicos
- Biológicos
- Etc.

Controle
etc.

LPC: linear prediction coefficients
Code-excited linear prediction: algoritmo para reconhecimento de voz (1985)
Residual-excited linear prediction (1970s)
Multipulse linear predictive coding (1998), para compressão de vídeo