Aula 6. Processo de Poisson. Aplicações. (Teórica).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Processo de Poisson não-homogêneo.

Definition. O processo de contagem $\{N(t),\ t \geq 0\}$ chama-se Processo de Poisson não-homogêneo com função de intensidade $\lambda(t),\ t \geq 0$, se

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t),\ t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;
3. $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$;
4. $\mathbb{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.

Processo de Poisson não-homogêneo.

Ex. 1. Prove que

$$\mathbb{P}(N(t+s)-N(t)=n) = e^{\int_t^{t+s}\lambda(u)du}\frac{\left(\int_t^{t+s}\lambda(u)du\right)^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

ou, seja $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ então

$$\mathbb{P}(N(t+s)-N(t)=n) = e^{m(t+s)-m(t)}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}, \quad n \geq 0$$

Prova (Ross, Cap. 5.4.1). Seja t fixo.

$$\begin{aligned}
P_n(s) &= \mathbb{P}(N(t+s) - N(t) = n) \\
P_0(s+h) &= \mathbb{P}(N(t+s+h) - N(t) = 0) \\
&= \mathbb{P}(\text{ 0 eventos em } (t, t+s), \text{ 0 eventos em } [t+s, t+s+h]) \\
&= \mathbb{P}(\text{ 0 eventos em } (t, t+s))\mathbb{P}(\text{ 0 eventos em } [t+s, t+s+h]) \\
&= P_0(s)[1 - \lambda(t+s)h + o(h)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{P_0(s+h) - P_0(s)}{h} &= -\lambda(t+s)P_0(s) + \frac{o(h)}{h} \\
P_0'(s) &= -\lambda(t+s)P_0(s)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\log P_0(s) = -\int_0^s \lambda(t+u)du = -\int_t^{t+s} \lambda(y)dy \quad \Rightarrow \quad P_0(s) = e^{-[m(t+s)-m(t)]}.$$

Exemplo 5.24.

A chegada de clientes em uma loja forma um processo de Poisson com a seguinte intensidade: a intensidade começa com 5 clientes por hora e aumenta linearmente até o máximo de 20 clientes por hora em 11 horas. Das 11:00hs até 13:00hs, a intensidade é constante igual a 20 clientes por hora. E depois, a intensidade diminui até atingir em 17 horas a intensidade de 12 clientes por hora. Qual é a probabilidade de que nenhum cliente vai chegar entre 8:30hs e 9:30hs da manhã? Qual é o número médio de clientes durante este período?

Exemplo 5.24. Temos um processo de Poisson não-homogêneo com função de intensidade $\lambda(t)$ dada pela seguinte fórmula

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 8, \\ 5 + 5(t-8), & 8 \le t \le 11, \\ 20, & 11 \le t \le 13, \\ 20 - 2(t-13), & 13 \le t \le 17, \\ 0, & 17 < t \le 24, \end{cases}$$

e $\lambda(t) = \lambda(t-24)$ para $t > 24$. O número de clientes entre 8.30 e 9.30 tem distribuição de Poisson com média $m(9.5) - m(8.5)$. Logo,

$$\exp\left\{-\int_{8.5}^{9.5} (5 + 5(t-8))dt\right\} = \exp\left\{-\int_{1/2}^{3/2} (5 + 5t)dt\right\} = e^{-10}$$

e o número médio é

$$\int_{1/2}^{3/2} (5 + 5t)dt = 10.$$

Amostragem de processo de Poisson não-homogêneos (Ross, Cap. 5.4.1).

Quando a intensidade $\lambda(t)$ é limitada, podemos imaginar o processo não-homogêneo como uma inferência aleatória de um processo homogêneo. Seja λ tal que $\lambda(t) \leq \lambda$ para todos os $t \geq 0$. Consideramos um processo de Poisson com taxa λ. Supomos que o evento que ocorre em instante t, vai ser contado com probabilidade $\lambda(t)/\lambda$. Assim a nova contagem forma um processo de Poisson não-homogêneo com taxa $\lambda(t)$. O seguinte exercício prova essa proposição.

Para o novo processo

$$\mathbb{P}(\text{um evento contado ocorre em } (t, t+h)) = \lambda(t)h + o(h).$$

Distribuição de S_n do Processo de Poisson não homogêneo.

Seja S_n o instante de tempo que ocorre o n-ésimo evento no processo de Poisson não-homogêneo. A função da densidade dele pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t < S_n < t+h) &= \mathbb{P}(N(t) = n-1, \text{ um evento em } (t, t+h)) + o(h) \\
&= \mathbb{P}(N(t) = n-1) P(\text{um evento em } (t, t+h)) + o(h) \\
&= e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} [\lambda(t) h + o(h)] + o(h) \\
&= \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!} h + o(h)
\end{aligned}$$

o que significa que

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \text{em que} \quad m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

Processo de Poisson composto.

Um processo estocástico $X(t)$ é chamado *processo de Poisson composto*, se ele pode ser representado da seguinte forma:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

em que $N(t)$ é um processo de Poisson e os Y_i's são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, e também independentes de $N(t)$.

Processo de Poisson composto. Exemplos.

1. Se $Y_i \equiv 1$, então $X(t)$ é um processo de Poisson.

2. Supomos que $N(t)$ é a chegada de ônibus para um evento, e Y_i é o número de passageiros no i-ésimo ônibus. Então, $X(t)$ é o número de participantes do evento que chegaram até o tempo t.

3. Supomos que a saída de clientes de um supermercado forma um processo de Poisson $N(t)$. Seja Y_i quantia de dinheiro deixada no supermercado pelo i-ésimo cliente. Assim $X(t)$ é o quanto de dinheiro foi deixado no supermercado até o tempo t.

Processo de Poisson composto. Média.

Calcularemos agora a média e a variância de $X(t)$. Temos que

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t))).$$

Agora,

$$\mathbb{E}(X(t) \mid N(t) = n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \middle| N(t) = n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \middle| N(t) = n\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n\mathbb{E}(Y_1).$$

Logo,

$$\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X(t) \mid N(t))) = \mathbb{E}(N(t)\mathbb{E}(Y_1)) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1).$$

Processo de Poisson composto. Variância.

Cálculo da variância baseia-se na seguinte fórmula (veja Capítulo 3, Ross): $\mathbb{V}ar[X(t)] = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(X(t) \mid N(t))] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}[X(t) \mid N(t)])$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X(t) \mid N(t) = n) &= \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \;\middle|\; N(t) = n\right) \\
&= \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n\mathbb{V}ar(Y_1).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X(t)) &= \mathbb{E}(N(t)\mathbb{V}ar(Y_1)) + \mathbb{V}ar(N(t)\mathbb{E}[Y_1]) \\
&= \lambda t \mathbb{V}ar(Y_1) + (\mathbb{E}[Y_1])^2 \lambda t \\
&= \lambda t(\mathbb{V}ar(Y_1) + (\mathbb{E}[Y_1])^2) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1^2).
\end{aligned}$$

Processo de Poisson composto. Exemplo.

Supomos que a chegada de famílias em Porto Velho forma um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 2$ famílias por semana. Supondo que o número de pessoas em uma família pode ser igual a 1, 2, 3, 4 com probabilidades $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$, respectivamente. Qual é a média e a variância do número de pessoas imigradas para Porto Velho durante cinco semanas?

Solução. Seja Y_i o número de pessoas na i-ésima família.

$$\mathbb{E}(Y_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{E}(Y_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{43}{6}.$$

Se $X(5)$ é o número de pessoas que chegaram durante 5 semanas, então

$$\mathbb{E}(X(5)) = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 25 \quad \text{e} \quad \mathbb{V}ar(X(5)) = 2 \cdot 5 \cdot \frac{43}{6} = \frac{215}{3}.$$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.