1 Função de Distribuição de Probabilidade

Nesta seção, vamos apresentar uma outra forma de associar probabilidades aos valores ou a intervalos de valores de uma variável aleatória. Chamaremos esta nova forma, de função de distribuição de probabilidade (f.d.p) ou de função de distribuição acumulada (f.d.a). Veremos que essa segunda denominação é bem sugestiva para a definição da função.

Definição 1.1 *Seja X uma variável aleatória discreta, a função de distribuição de probabilidade de X, é definida para qualquer número real x, pela seguinte expressão:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x),$$

sendo que o domínio de F é todo o conjunto dos números reais, enquanto que a imagem é o intervalo $[0, 1]$.

A função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X, apresenta as seguintes propriedades:

i) $0 \leq F(x) \leq 1$, pois $F(x)$ é definida como uma probabilidade.

ii) $F(x)$ é não decrescente e contínua à direita.

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Exemplo 1.1 ***(Exercício Resolvido 1)*** *Seja X a variável aleatória que representa o número de caras em três lançamentos independentes de uma moeda nonesta, ou seja, $X = \{0, 1, 2, 3\}$. E portanto, $X \sim$ Binomial$(3, 1/2)$. Determinar a função de distribuição de probabilidade da variável aleatória X.*

Para determinar $F(x)$, temos que obter os valores que ela assume para todo $x \in \mathbb{R}$:

- *Se* $(-\infty < x < 0)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

- *Se* $(0 \leq x < 1)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{T, T, T\}) = 1/8.$$

  Note que a variável aleatória X só assume valores inteiros, então esse valor fica inalterado no intervalo $[0, 1)$. Isto é, $F(0.1), F(0.5)$ ou $F(0.9)$ também são iguais a $1/8$.

- *Se* $(1 \leq x < 2)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\})$$

$$= \mathbb{P}(\{T, T, T\}) + \mathbb{P}(\{H, T, T\}) + \mathbb{P}(\{T, H, T\}) + \mathbb{P}(\{T, T, H\}) = 4/8.$$

- *Se* $(2 \leq x < 3)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) =$$

$$\mathbb{P}(\{T,T,T\})+\mathbb{P}(\{H,T,T\})+\mathbb{P}(\{T,H,T\})+\mathbb{P}(\{T,T,H\})+\mathbb{P}(\{H,H,T\})+\mathbb{P}(\{T,H,H\})+\mathbb{P}(\{H,T,H\}) = 7/8.$$

- *Se* $(x \geq 3)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \cup \{X = 3\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 2\}) + \mathbb{P}(\{X = 3\}) = 1$$

Portanto a função de distribuição de probabilidade da variável aleatória X *é:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad -\infty < x < 0 \\ 1/8 & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & se \quad 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & se \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 1.2 ***(Exercício Resolvido** 2)* *Considerando o lançamento de dois dados honestos, seja* X *a variável aleatória que assume os valores da soma das faces, ou seja,* $X = \{2, 3, \ldots, 12\}$. *Qual é a função de distribuição de probabilidade de* X*?*

Para definir $F(x)$, *precisa-se obter a sua expressão para todo* $x \in \mathbb{R}$*:*

Se $(x < 2)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Se $(2 \leq x < 3)$ *então:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{1, 1\}) = 1/36.$$

Se $(3 \leq x < 4)$ *então::*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{1, 1\}) + \mathbb{P}(\{1, 2\}) + \mathbb{P}(\{2, 1\}) = 3/36.$$

Repetimos esses mesmos passos para os demais valores de x. *Deste modo, encontramos todos os valores da função de distribuição de probabilidade da variável aleatória* X*:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 2 \\ 1/36 & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & se \quad 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & se \quad 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & se \quad 5 \leq x < 6 \\ 15/36 & se \quad 6 \leq x < 7 \\ 21/36 & se \quad 7 \leq x < 8 \\ 26/36 & se \quad 8 \leq x < 9 \\ 30/36 & se \quad 9 \leq x < 10 \\ 33/36 & se \quad 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & se \quad 11 \leq x < 12 \\ 1 & se \quad x \geq 12. \end{cases}$$

A partir da função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X, conseguimos encontrar a sua distribuição de massa de probabilidade.

Exemplo 1.3 ***(Exercício Resolvido 3)*** *Uma variável aleatória X possui a seguinte função de distribuição de probabilidade:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 5 \\ 0.3 & se \quad 5 \leq x < 7 \\ 0.5 & se \quad 7 \leq x < 8 \\ 0.9 & se \quad 8 \leq x < 15 \\ 1 & se \quad x \geq 15. \end{cases}$$

Com essas informações vamos determinar a distribuição de probabilidade de X.

- *Quais são os valores que X assume? Observar os extremos dos intervalos que aparecem na definição de $F(x)$. Nesses extremos $F(x)$ dá "saltos".*
- *Neste caso os valores que X assume são $5, 7, 8$ e 15.*
- *Cálculo da distribuição de massa de probabilidade:* $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X \leq 5) - \mathbb{P}(X = 5)$

Baseando-se na definição de função de distribuição de probabilidade, temos que a distribuição de probabilidade de X é definida por:

X	$\mathbb{P}(X = x)$
5	*0.3*
7	*0.2*
8	*0.4*
15	*0.1*

Exemplo 1.4 ***(Exercício Resolvido 4)***

Para o exemplo 1.3, determine as seguintes probabilidades:

a) $\mathbb{P}(X \leq 7)$.

Resposta: $\mathbb{P}(X \leq 7) = F(7) = \mathbb{P}(\{X = 7\} \cup \{X = 5\}) = \mathbb{P}(\{X = 7\}) + \mathbb{P}(\{X = 5\}) = \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 5) = 0.3 + 0.2 = \mathbf{0.5}$.

b) $\mathbb{P}(X < 7)$.

Resposta: $\mathbb{P}(X < 7) = \mathbb{P}(\{X = 5\}) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbf{0.3}$.

c) $\mathbb{P}(\mathbf{7 \leq X \leq 10})$.

Resposta: *Temos que*

$$\{X \leq 10\} = \{7 \leq X \leq 10\} \cup \{X < 7\}$$

Como $\{X < 7\}$ *e* $\{7 \leq X \leq 10\}$ *são disjuntos, temos que*

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = \mathbb{P}(7 \leq X \leq 10) + \mathbb{P}(X < 7) \Rightarrow \mathbb{P}(7 \leq X \leq 10) = \mathbb{P}(X \leq 10) - \mathbb{P}(X < 7)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{7 \leq X \leq 10}) = \mathbf{F(10) - F(5) = 0.9 - 0.3 = 0.6}.$$

Outra resolução:

$$\{7 \leq X \leq 10\} = \{X = 7\} \cup \{X = 8\} \Rightarrow \mathbb{P}(\{7 \leq X \leq 10\}) = \mathbb{P}(\{X = 7\} \cup \{X = 8\}) = \mathbb{P}(\{X = 7\}) + \mathbb{P}(\{X = 8\})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(7 \leq X \leq 10) = \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 8) = 0.2 + 0.4 = 0.6.$$

d) $\mathbb{P}(X > 9)$.

Resposta: $\mathbb{P}(X > 9) = \mathbf{1} - \mathbb{P}(\mathbf{X \leq 9}) = \mathbf{1 - 0.9 = 0.1}$.