1 Função Geradora de Probabilidades

Se X for uma variável aleatória com p_X dada e $I_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, definimos a seguinte função

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = s^0\ p_X(0) + s^1\ p_X(1) + s^2\ p_X(2) + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} s^r\ p_X(r).$$

Exemplo 1.1 *Se X for uma variável aleatória binomial de parâmetros n e p, o que indicaremos por $X \sim Bin(n,p)$, temos que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^X) &= \sum_{r=0}^{n} s^r p_X(r) = \sum_{r=0}^{n} s^r \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\
&= \binom{n}{0} (sp)^0 (1-p)^{n-0} + \binom{n}{1} (sp)^1 (1-p)^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} (sp)^n (1-p)^{n-n} \\
&= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (sp)^r (1-p)^{n-r}.
\end{aligned}$$

Agora lembre-se do Binômio de Newton: $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$.

Então, se chamarmos $x = sp$ e $y = (1-p)$, temos que

$$G(s) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (sp)^r (1-p)^{n-r} = (sp + (1-p))^n$$

E portanto, $G(s) = (sp + 1 - p)^n$.

Exemplo 1.2 *Se X for uma variável aleatória geométrica de parâmetro p, o que indicaremos por $X \sim Geo(p)$, temos que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^X) &= \sum_{r=1}^{\infty} s^r p_X(r) = \sum_{r=1}^{\infty} s^r (1-p)^{r-1} p \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} s^r (1-p)^r (1-p)^{-1} p = \frac{1}{1-p} \sum_{r=1}^{\infty} s^r (1-p)^r p \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{r=1}^{\infty} [s(1-p)]^r
\end{aligned}$$

Veja que $\sum_{r=1}^{\infty} [s(1-p)]^r = \{s(1-p) + s^2(1-p)^2 + s^3(1-p)^3 + ...\}$

Ou seja, temos a soma infinita de uma progressão geométrica de razão q e termo inicial a_0, cujo resultado é $\frac{a_0}{1-q}$.

Logo
$$\sum_{r=1}^{\infty}[s(1-p)]^r = s(1-p) + s^2(1-p)^2 + s^3(1-p)^3 + ... = \frac{s(1-p)}{1-s(1-p)}.$$
Portanto
$$G(s) = \frac{p}{1-p}\sum_{r=1}^{\infty}[s(1-p)]^r = \left(\frac{p}{1-p}\right)\left(\frac{s(1-p)}{1-s(1-p)}\right) \Rightarrow G(s) = \frac{ps}{1-s(1-p)}.$$
A função $G(s)$ é chamada de função geradora de probabilidades. Como veremos no teorema a seguir, a sua importância se deve ao fato de facilitar a obtenção da $\mathbb{E}(X)$ e da $Var(X)$.

Teorema 1.1 *Seja $\mathbb{E}(s^X) = G(s)$, e seja $G^{(r)}(s)$ a r-ésima derivada de $G(s)$. Então*
$$G^{(r)}(1) = \mathbb{E}\{X(X-1)(X-2)\dots(X-r+1)\}.$$
Em particular, $G^{(1)}(s)\Big|_{s=1} = \dfrac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=1} = G'(1) = \mathbb{E}(X)$.

A prova desse teorema pode ser vista em Grimmett (2001).

Observações

1. Para $r = 2$ temos
   - $G^{(2)}(s) = \dfrac{d^2G(s)}{ds^2} = G''(s)$
   - $G''(1) = \mathbb{E}\{X(X-2+1)\} = \mathbb{E}\{X(X-1)\} = \mathbb{E}\{X^2 - X\}$
2. A série $\sum_{r=0}^{\infty} s^r p_X(r)$ converge para $|s| \leq 1$, pois $\sum_{r=0}^{\infty} p_X(r) = 1$. Logo $G(s)$ está bem definida para $|s| \leq 1$.

Voltando ao exemplo 1.8.1, onde $X \sim Bin(n,p)$ e $G(s) = (sp + 1 - p)^n$, temos que
$$\begin{aligned} G'(s) &= n(sp+1-p)^{n-1}\ p = p \cdot n(sp+1-p)^{n-1} \\ G''(s) &= pn(n-1)p(sp+1-p)^{n-2} = p^2n(n-1)(sp+1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$
Assim pelo teorema anterior,
$$G'(1) = \mathbb{E}(X) = np,$$
$$G''(1) = \mathbb{E}\{X(X-1)\} = \mathbb{E}\{X^2 - X\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$
Logo
$$\begin{aligned} G''(1) &= p^2n(n-1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \\ &= p^2n(n-1) = \mathbb{E}(X^2) - np \end{aligned}$$
Portanto,
$$\mathbb{E}(X^2) = p^2n(n-1) + np = np\{(n-1)p + 1\}.$$

Agora podemos encontrar $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$:

$$\begin{aligned} Var(X) &= n \cdot p\{(n-1)p + 1\} - n^2p^2 \\ &= n \cdot p\{n \cdot p - p + 1 - n \cdot p\} = n \cdot p \cdot (1-p). \end{aligned}$$

Voltando agora ao exemplo 1.8.2, onde $X \sim Geo(p)$ e $G(s) = \dfrac{ps}{1 - s(1-p)}$, temos que

$$G'(s) = \frac{p[1 - s(1-p)] - [-(1-p)]p \cdot s}{[1 - s(1-p)]^2} = \frac{p - p \cdot s(1-p) + p \cdot s(1-p)}{[1 - s(1-p)]^2} = \frac{p}{[1 - s(1-p)]^2}.$$

Substituindo $s = 1$, encontramos

$$G'(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = \mathbb{E}(X).$$

2 Exercícios

1. Para X, variável aleatória geométrica de parâmetro p ($X \sim Geo(p)$), calcule $Var(X)$ usando a sua Função Geradora de Probabilidades, $G(s)$.

   Resposta:

$$G(s) = \frac{ps}{1 - s(1-p)} \Rightarrow G'(s) = \frac{p[1 - s(1-p)] + (1-p)ps}{[1 - s(1-p)]^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = G'(1) = \frac{p[1 - 1 + p] + (1-p)p}{[1 - 1 + p]^2} = \frac{p^2 + p - p^2}{p^2} = \frac{p}{p^2} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

$$G'(s) = \frac{p[1 - s(1-p)] + (1-p)ps}{[1 - s(1-p)]^2} = \frac{p[1 - s + sp] + ps - p^2s}{[1 - s(1-p)]^2} = \frac{p - sp + sp^2 + ps - sp^2}{[1 - s(1-p)]^2} = \frac{p}{[1 - s(1-p)]^2}$$

$$\Rightarrow G''(s) = \frac{-p \cdot 2 \cdot [1 - s(1-p)] \cdot (p-1)}{[1 - s(1-p)]^4} \Rightarrow G''(1) = \frac{-p \cdot 2 \cdot [1 - 1 + p)] \cdot (p-1)}{[1 - 1 + p)]^4} = \frac{2p^2(1-p)}{p^4} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\Rightarrow G''(1) = \mathbb{E}\{X(X-1)\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \mathbb{E}(X)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2. Utilizando o teorema 1.1, encontre $\mathbb{E}(X^3)$ para $X \sim Bin(n,p)$ e $X \sim Geo(p)$.

3. **Experimento Aleatório:** Uma moeda honesta é lançada duas vezes. Seja $X(\omega)$ o número de ocorrências de caras.

   (a) Encontre a função geradora de probabilidades $G(s)$.

   (b) A partir da $G(s)$ encontre $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$.

4. Encontre a função geradora de probabilidade para a seguinte variável aleatória

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p, \\ -1, & \text{com probabilidade } 1-p. \end{cases}$$

   Agora, use-a para encontrar $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$.

   Resposta:

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = s^1 \cdot p + s^{-1} \cdot (1-p) \Rightarrow G'(s) = p - (1-p)s^{-2} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = G'(1) = p - (1-p) = 2p-1$$

$$G''(s) = 2(1-p)s^{-3} \Rightarrow G''(1) = 2(1-p) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = 2(1-p) + \mathbb{E}(X) = 2-2p+2p-1 = 1$$

$$\Rightarrow Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1 - (2p-1)^2 = 1 - 4p^2 + 4p - 1 = 4p(1-p)$$