EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 2^a ORDEM LINEARES2

1. Coeficientes constantes e homogêneas

Um caso especial importante, que pode, frequentemente, ser resolvido explicitamente é o de EDOs de lineares de 2^a ordem a coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = g(x), \tag{1}$$

sendo p, q constantes reais e g função contínua definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Consideremos inicialmente a equação homogênea associada a (1)

$$y'' + y' + qy = 0, \tag{2}$$

Vamos procurar soluções da forma exponencial $y(x) = e^{\alpha x}$.

Se $L[y] = y'' + py' + qy$, obtemos $L(e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q)$ e, portanto, $y(x) = e^{\alpha x}$ é solução de (2) se, e somente se,

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \tag{3}$$

que é a *equação característica* associada a (3).

O polinômio $p(x) = x^2 + px + q$ é denominado o *polinômio característico* da equação.

Temos três casos a considerar, conforme a equação característica tenha 2, 1 ou nenhuma solução real, ou seja, seu *discriminante* $\Delta = p^2 - 4q$ seja positivo, nulo ou negativo.

Date: October 20, 2020.

($\Delta > 0.$) Neste caso, a equação (3) tem duas raízes reais α_1, α_2 e, consequentemente, $y_1(x) = e^{\alpha_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$, são duas soluções linearmente independentes (porquê?) . Segue então do Teorema 4 da Introdução que a *solução geral* da equação (2) é dada por:

$$y_h(x) = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}.$$

($\Delta = 0.$) Neste caso, a equação (3) tem apenas uma raíz real $\alpha = -p/2$ e, consequentemente, $y_1(x) = e^{\alpha x}$. é uma solução da equação. Para encontrar outra linearmente independente, vamos usar o "método da variação dos parâmetros", ou seja vamos procurar outra solução que seja da forma:

$y(x) = C(x)e^{\alpha(x)}$. sendo $C(x)$ não constante (porquê não constante?).

Calculando, obtemos:

$$\begin{aligned} L[y] &= C(x)L[e^{\alpha(x)}] + C'(x)e^{\alpha(x)}\,(2\alpha + p) + C''(x)e^{\alpha(x)} \\ &= C(x)\cdot 0 + C'(x)e^{\alpha(x)}\cdot 0 + C''(x)\cdot e^{\alpha(x)} \\ &= C''(x)\cdot e^{\alpha(x)}. \end{aligned}$$

Assim, teremos $L[y] \equiv 0 \Leftrightarrow C''(x) \equiv 0$. Podemos tomar, por exemplo, $C(x) = x$ e obtermos duas soluções linearmente independentes $y_1(x) = e^{\alpha x}$ e $y_2(x) = xe^{\alpha x}$.

($\Delta < 0.$) Neste caso, a equação (3) tem duas raízes **complexas conjugadas** $\alpha_1 = a + bi, \alpha_2 = a - bi$.

Admitindo soluções complexas teríamos, novamente que $z_1(x) = e^{\alpha_1 x} = e^{ax}(\cos bx + i\text{sen}\, bx)$ e $z_2(x) = e^{\alpha_2 x} = e^{ax}(\cos bx + i\text{sen}\, bx)$. Como queremos soluções reais, usamos o princípio da superposição para obter:

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\left(z_1(x) + z_2(x)\right) = e^{ax}\left(\cos bx\right) \quad \text{e}$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2i}\left(z_1(x) - z_2(x)\right) = e^{ax}\left(\operatorname{sen} bx\right)$$

são duas soluções linearmente independentes (e reais.)

Exemplo 1. *Determine a solução da equação:* $y'' - 6y' + 9 = 0$, *que satisfaz as condições iniciais:* $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

O procedimento adotado acima pode ser estendido para o caso de equações de ordem maior. Vamos aqui considerar apenas um exemplo que deve ser suficiente para ilustrar o caso geral.

Exemplo 2. *Determine a solução geral da equação:*
$y^{(6)} - 7y^{(5)} + 19y^{(4)} - 25y^{(3)} + 16y^{(2)} - 4y' = 0$.

2. Coeficientes constantes não homogêneas - Método dos coeficientes a determinar

Vamos novamente considerar a EDO de linear de 2^a ordem a coeficientes constantes (1)

$$L[y] = y'' + py' + qy = g(x),$$

no caso em que a função g tem uma das seguintes formas:

(1) $g(x) = e^{\alpha x}$ (forma exponencial).
(2) $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ (forma polinomial).
(3) $g(x) = M \cos ax + N \operatorname{sen} ax$ (combinação de senos e cossenos).

Observando que o *operador diferencial* L leva funções de cada um dos tipos acima em funções do mesmo tipo, parece razoável procurar soluções da equação que também seja do mesmo tipo. Vamos considerar cada um dos casos separadamente;

Caso 1. $g(x) = e^{\alpha x}$**.** Procuramos soluções da forma $y = Ae^{\alpha x}$. Temos:

$$L[y] = A\left[\alpha^2 + p\alpha + q\right] e^{\alpha x}$$

Se $\alpha^2 + p\alpha + q \neq 0$, então

$$L[y] = e^{\alpha x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\alpha^2 + p\alpha + q}.$$

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = Ae^{\alpha x}$, *se α não for raiz da equação característica.*

Se α for raiz da equação característica ($\alpha^2 + p\alpha + q = 0$), não podemos encontrar solução exatamente desta forma. Usando o *método da variação dos parâmetros* de maneira análoga ao que fizemos para equações homogêneas, somos levados a procurar soluções da forma $y = Axe^{\alpha x}$, obtendo agora:

$$L[y] = Ax\left[\alpha^2 + p\alpha + q\right] e^{\alpha x} + A\,[2\alpha + p]]e^{\alpha x} = A\,[2\alpha + p]]e^{\alpha x}.$$

Se $2\alpha + p \neq 0$, então

$$L[y] = e^{\alpha x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2\alpha + p}.$$

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = Axe^{\alpha x}$, *se α for raiz* simples *da equação característica.*

Se α for raiz *dupla* da equação característica ($\alpha^2 + p\alpha + q = 0$) e $2\alpha + p = 0$, não podemos encontrar solução dessa forma. Vamos então procurar soluções da forma $y = Ax^2e^{\alpha x}$, obtendo agora:

$$L[y] = Ax^2\left[\alpha^2 + p\alpha + q\right] e^{\alpha x} + 2Ax\,[2\alpha + p]]e^{\alpha x} + 2Ae^{\alpha x} = 2Ae^{\alpha x},$$

e $L[y] = e^{\alpha x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = \frac{1}{2}x^2e^{\alpha x}$, *se* α *for raiz* dupla *da equação característica.*

Caso 2. $g(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Procuramos soluções da forma $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$.. Temos:

$$qy = qb_0 + qb_1x + qb_2x^2 + qb_3x^3 \cdots + qb_{n-1}x^{n-1} + qb_nx^n.$$
$$py\prime = pb_1 + 2pb_2x + 3pb_3x^2 + \cdots + (n-1)pb_{n-1}x^{n-2} + npb_nx^{n-1}.$$
$$y\prime\prime = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3x + \cdots + (n-1)(n-2)b_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)b_nx^{n-2}.$$

$$L[y] = qb_0+pb_1+2pb_2+(qb_1+2pb_2+3\cdot 2b_3)x+\cdots+(qb_{n-1}+npb_n)x^{n-1}+qb_nx^n$$

Queremos $L[y] = g(x)$. Comparando os coeficientes, obtemos:

$$\begin{cases} qb_n & = a_n \\ qb_{n-1} + npb_n & = a_{n-1} \\ qb_{n-2} + (n-1)pb_{n-1} + n(n-1)b_n & = a_{n-2} \\ \cdots & = \cdots \\ qb_1 + 2pb_2 + 3 \cdot 2b_3 & = a_1 \\ qb_0 + pb_1 + 2pb_2 & = a_0 \end{cases}$$

Se $q \neq 0$, obtemos, da primeira equação $b_n = \frac{a_n}{q}$ e as outras equações são resolvidas recursivamente para obter os coeficientes $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ de y.

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, *se* $q \neq 0$. . Observemos que $q = 0$ se e somente se 0 é raiz da equação característica $x^2 + px + q = 0$.

Se $q = 0$, o polinômio $L[y]$ tem grau $n-1$ e precisamos procurar solução da forma polinômio de grau $n+1$. Como, neste caso, as constantes são soluções da equação homogênea, não precisamos incluir o termo constante no polinômio) e procuramos então soluções da forma:

$y = x\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right) = b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots + b_{n-1}x^n + b_nx^{n+1}$.

Então teremos:

$$\begin{aligned} L[y] &= pb_0 + 2pb_1 + (qb_0 + 2pb_1 + 3\cdot 2b_2)x + \cdots + (qb_{n-1} + (n+1)pb_n)x^n \\ &\quad + qb_nx^{n+1} \\ &= pb_0 + 2pb_1 + (2pb_1 + 3\cdot 2b_2)x + \cdots + ((n+1)pb_n)x^n \end{aligned}$$

Se $p \neq 0$, obtemos, comparando coeficientes $b_n = \frac{a_n}{(n+1)p}$ e as outras equações são resolvidas recursivamente para obter os coeficientes $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ de y.

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = x\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right)$, *se* $q = 0$ *e* $p \neq 0$. . Observemos que $p = q = 0$ se e somente se 0 é raiz dupla da equação característica $x^2 + px = q = 0$.

Finalmente, se $p = q = 0$, o polinômio $L[y]$ tem grau $n-2$ e precisamos procurar solução da forma polinômio de grau $n+2$. Como, neste caso, as constantes e os polinômios de grau 1 são soluções da equação homogênea, não precisamos incluir esses termos no polinômio) e procuramos então soluções da forma:

$y = x^2\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right) = b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots + b_{n-1}x^{(n+1)} + b_nx^{n+2}$.

Agora, o coeficiente termo de grau n de $L[y] = y\prime\prime$ será $(n+2)(n+1)b_n$ e

$b_n = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ e as outras equações são resolvidas recursivamente para obter os coeficientes $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ de y.

Portanto, encontramos uma solução particular da equação não homogênea da forma $y = x^2 \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right)$, *se* $q = 0$ *e* $p = q = 0$. Observemos que $p = q = 0$ se e somente se 0 é raiz dupla da equação característica $x^2 + px = q = 0$.

Caso 3. $g(x) = Ae^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $Be^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x$. Os dois casos são semelhantes, vamos considerar apenas o segundo. Como $e^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x)}}{2i}$ podemos, passando para o campo complexo, proceder como no Caso 1 para encontar as soluções dos problemas: $L[y] = e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $L[y] = e^{(\alpha-i\beta)x}$ e depois usar a linearidade do problema.

Se $\alpha + i\beta$ não for solução da equação característica, encontramos uma solução particular da equação não homogênea $L[y] = e^{(\alpha+i\beta)x}$ da forma $y_1 = Ae^{(\alpha+i\beta)x}$ e uma uma solução particular da equação não homogênea $L[y] = e^{(\alpha-i\beta)x}$ da forma $\bar{y_1} = \bar{A}e^{(\alpha-i\beta)x}$, sendo $A = \frac{1}{(\alpha+i\beta)^2 + p(\alpha+i\beta)+q} = M + iN$ um número *complexo.*

Tomando a parte imaginária de $y_1 = (M + iN)(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\text{sen}\,\beta x))$ obtemos $\frac{y_1 - \bar{y_1}}{2i} = Ne^{\alpha x}\cos(\beta x) + Me^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)$, obtemos a solução do problema real.

Se $\alpha + i\beta$ for raiz simples da equação característica procuramos solução da forma $Mxe^{\alpha x}\cos(\beta x) + Nxe^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)$, e, Se $\alpha + i\beta$ for raiz dupla da equação característica procuramos solução da forma $Mx^2e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Nx^2e^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)$.

Observação 3. *O método pode ser estendido para englobar os seguintes casos:*

(1) *Se* $g(x)$ *for da forma* $(a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ *ou* $(a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n)e^{\alpha x}\mathit{sen}\,(\beta x)$, *procuramos soluções da forma* $(b_0 + b_1 x + \cdots b_n x^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + (c_0 + c_1 x + \cdots c_n x^n)e^{\alpha x}\mathit{sen}\,(\beta x)$

ou $x(b_0+b_1x+\cdots b_nx^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+x(c_0+c_1x+\cdots c_nx^n)e^{\alpha x}sen\,(\beta x)$
ou $x^2(b_0+b_1x+\cdots b_nx^n)e^{\alpha x}\cos(\beta x)+x^2(c_0+c_1x+\cdots c_nx^n)e^{\alpha x}sen\,(\beta x)$

(2) *Se $g(x)$ for soma de termos das formas acima, procuramos a solução também como soma de termos das formas acima.*

Exemplo 4. *Encontrar a solução geral da equação : $y'' - 2y' + y = 2x$.*

Neste caso, a equação característica é: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$, que tem 1 como raiz dupla. Como 0 não é solução desta equação, procuramos uma solução particular da forma $y = Ax+B$ (polinômio do primeiro grau). Calculando, obtemos: $y'' - 2y' + y = -2A + Ax + B = Ax + (B - 2A)$.

Comparando com o lado direito da equação, obtemos:
$Ax + (B - 2A) = 2x \Leftrightarrow A = 2$ e $B = 4$.

Portanto uma solução particular da equação é $y_p = 2x + 4$.

A solução geral da homogênea associada é dada pelas combinações lineares das soluções; $y_1 = e^x$ e $y_2 = xe^x$. Portanto a solução geral da equação dada é dada por: $C_1e^x + C_2xe^x + 2x + 4$.

O método pode ser estendido para equações de ordem mais alta. Vamos ilustrar isto em um exemplo de ordem 3.

Exemplo 5. *Encontrar a solução geral da equação : $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$.*

Neste caso, a equação característica é: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujas raízes são $1, 2$ e 3. Como 0 e -1 não são soluções desta equação, procuramos uma solução particular da forma $y_p = (Ax + B)e^{-x}$. Calculando, obtemos:

$$y = Axe^{-x} + Be^{-x}$$
$$y\prime = -Axe^{-x} + Ae^{-x} - Be^{-x}$$
$$y\prime\prime = Axe^{-x} + -2Ae^{-x} + Be^{-x}$$
$$y\prime\prime\prime = -Axe^{-x} + +3Ae^{-x} - Be^{-x}$$

Substituindo na equação diferencial e simplificando, obtemos;
$-24Axe^{-x} + (26A - 24B)e^{-x} = 2xe^{-x} + 0 \cdot e^{-x}$,
de onde segue que $A = -\frac{1}{12}$ e $B = \frac{-13}{144}$. Uma solução particular é então $y_p = -\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$. e a solução geral é:
$-\frac{1}{12}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x} + C_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$.