TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

TEOREMAS DE HEAVISIDE

* Expansão em Frações parciais

a) Polos reais distintos

b) Polos complexos distintos

c) Polos reais repetido

* Solução de EDOs

Motivação

- Para terminar a solução das EDOs que modelam sistemas dinâmicos usando a abordagem da transformada de Laplace (*ℒ[*]*) é preciso calcular sua transformada inversa (*ℒ⁻¹[*]*) para voltar ao domínio do tempo para analisar as respostas temporais dos sistemas.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- No entanto, esta integral pode ser difícil de resolver, principalmente quando *F(s)* é de grau elevado. Se *F(s)* for racional, é possível fatorar o polinômio do numerador e do denominador:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+zm)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = \frac{K\prod_i^m(s+z_i)}{\prod_i^n(s+p_i)} \qquad n \geq m \; para \; sistemas \; físicos.$$

- A forma mais fácil de obter *f(t)* é expandir *F(s)* como uma soma de termos simples e usar as tabelas de Laplace para obter *f(t)*. Este processo é conhecido como expansão em frações parciais e baseia-se nos Teoremas de Heaviside.

Polos reais e distintos

- A ideia é reescrever F(s) como uma soma de frações de primeira ordem como a seguir:

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+zm)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+pn)} = \frac{\alpha_1}{(s+p_1)} + \frac{\alpha_2}{(s+p_2)} \cdots \frac{\alpha_n}{(s+p_n)}$$

- Obs: polos: $-p_1, -p_2 \;\cdots - p_n$

  resíduos: $\alpha_1, \quad \alpha_2 \cdots \alpha_n$

Os resíduos podem ser calculados pelo método do "*cover-up*" (encobrimento), como a seguir:

Se: $F(s)(s+p_1)\Big|_{(s=-p_1)} = \left[\frac{\alpha_1}{\cancel{(s+p_1)}}\cancel{(s+p_1)} + \frac{\alpha_2}{(s+p_2)}(s+p_1) \cdots \frac{\alpha_n}{(s+p_n)}(s+p_1)\right]\Bigg|_{(s=-p_1)} = \alpha_1$

$$\alpha_k = F(s)(s+p_k)\Big|_{(s=-p_k)}$$

Polos reais e distintos

- Exemplo:

$$F(s) = \frac{10(s+1)(s+3)(s+5)}{(s+2)(s+4)(s+6)(s+7)} = \frac{\alpha_1}{(s+2)} + \frac{\alpha_2}{(s+4)} + \frac{\alpha_3}{(s+6)} + \frac{\alpha_4}{(s+7)}$$

- Obs: zeros: $-1, -3, -5$

  polos: $-2, -4, -6, -7$

Os resíduos podem ser calculados pelo método do "*cover-up*" (encobrimento), como a seguir:

$$\alpha_1 = F(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{10(-1)(+1)((+3)}{(+2)(+4)(+5)} = \frac{-3}{4}$$

$$\alpha_2 = F(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{-3}{2}$$

$$\alpha_3 = F(s)(s+6)\Big|_{s=-6} = \frac{-75}{4}$$

$$\alpha_4 = F(s)(s+7)\Big|_{s=-7} = 32$$

Polos reais e distintos

$$F(s) = \frac{10(s+1)(s+3)(s+5)}{(s+2)(s+4)(s+6)(s+7)} = \frac{\frac{-3}{4}}{(s+2)} + \frac{\frac{-3}{2}}{(s+4)} + \frac{\frac{-75}{4}}{(s+6)} + \frac{32}{(s+7)}$$

$$F(s) == \frac{-3}{4(s+2)} + \frac{-3}{2(s+4)} + \frac{-75}{4(s+6)} + \frac{32}{(s+7)}$$

Tabela de Laplace:

tempo	frequência
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t} - \frac{75}{4}e^{-6t} + 32e^{-at}$$

Obs: Teorema do Valor Final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = 0$$

Polos complexos conjugados:

- Apresentaremos este Teorema através de um exemplo.
- Ex.:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s(s + 1 + j)(s + 1 - j)}$$

Separando em frações parciais:

$$G(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2 s + c_3}{s^2 + 2s + 2}$$

Calculando c_1 pelo "encobrimento":

$$c_1 = G(s)s|_{s=0} = \left.\frac{1}{s^2+2s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{c_2 s + c_3}{s^2+2s+2} =$$

Igualando o numerador:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(s^2 + 2s + 2) + s(c_2 s + c_3) = 1 \Rightarrow s^2(1 + 2c_2) + s(2 + 2c_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -1/2 \\ c_3 = -1 \end{cases}$$

Ex.: Polos complexos conjugados:

$$\therefore G(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1/2\ \ s+1}{s^2+2s+2} \rightarrow obs\text{: } TVF = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ G(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right]$$

Criando frações parciais que existam na tabela disponível:

$$\therefore G(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+2s+2} - \frac{1}{s^2+2s+2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

PARES DE TRANSFORMADAS

Pares de Transformadas de Laplace *(Continuação)*

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at}\,\text{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$
25	$1 - \cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
26	$\omega t - \text{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega^3}{[illegible]}$

Ex.: Polos complexos conjugados:

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-t}\text{sen}t + e^{-t}\text{cos}t\right)$$

$$obs\colon TVF = \lim_{t \to \infty} f(t) = \frac{1}{2}$$

Polos reais múltiplos

Ex.: p_1 multiplicidade 3:

$$G(s) = \frac{c_1}{(s+p_1)} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{(s+p_1)^3} + \frac{c_4}{(s+p_4)} + \cdots + \frac{c_n}{(s+p_n)}$$

Os resíduos dos polos distintos podem ser calculados pelos métodos anteriores.

O resíduo do polo múltiplo de maior ordem pode ser calculado pelo "encobrimento":

a) $$(s+p_1)^3 G(s)|_{s=-p_1} = c_1(s+p_1)^2 + c_2(s+p_1) + c_3 + \cdots \frac{c_n}{(s+p_n)}(s+p_1)^3\Big|_{s=-p_1}$$

$$c_3 = (s+p_1)^3 G(s)|_{s=-p_1}$$

b) Não dá para calcular c_2 pelo "encobrimento":

$$(s+p_1)^2 G(s)|_{s=-p_1} = c_1(s+p_1) \quad + c_2 + \frac{\mathbf{c_3}}{(\mathbf{s+p_1})} + \cdots \frac{c_n}{(s+p_n)}(s+p_1)^2\Big|_{s=-p_1}$$

Para calcular c_2: $\frac{d}{ds}[(s+p_1)^3 G(s)]|_{s\ -\ p1} = \left\{2c_1(s+p_1) + c_2 + \cdots + \frac{d}{ds}\left[\frac{c_n}{(s+p_n)}(s+p_1)^3\right]\right\}|_{s=-p_1}$

$$c_2 = \frac{d}{ds}[(s+p_1)^3 G(s)]|_{s\ =\ -p1}$$

Polos reais múltiplos

c) $c_1 = \frac{d^2}{ds^2}[(s+p_1)^3 G(s)]|_{s\ =\ -p1} = \frac{d}{ds}\left(\left\{2c_1(s+p_1) + c_2 + \cdots + \frac{d}{ds}\left[\frac{c_n}{(s+p_n)}(s+p_1)^3\right]\right\}\right)|_{s\ =\ -p1}$

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}[(s+p_1)^3 G(s)]|_{s\ =\ -p1}$$

Fórmula geral para polo com multiplicidade *k*:

$$c_{k-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{ds^i}(s+p_1)^k G(s)\right]\Bigg|_{s=-pi} \qquad i = 0{,}1\,, \ldots \ldots .\,(k-1)$$

Polos reais múltiplos

Ex.: $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{\alpha_1}{(s+1)} + \frac{\alpha_2}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_3}{(s+2)}$

$$\alpha_3 = G(s)\cdot(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = 1$$

$$\alpha_2 = G(s)(s+1)^2\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{d}{ds}[G(s)(s+1)^2]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2}\Big|_{3=-1}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+2)}$$

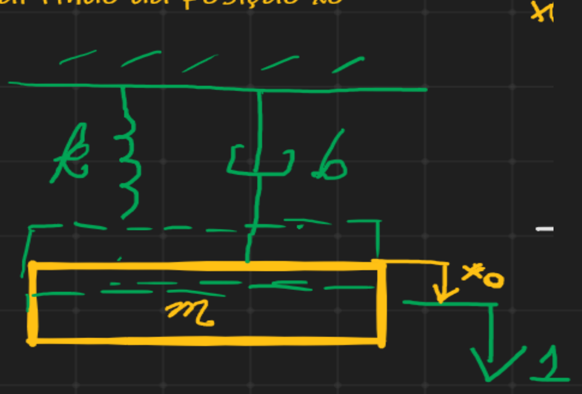
$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \longrightarrow$ g(t)= $-\,e^{-t} - \text{t}e^{-t} + e^{-2t}$

tabela de Laplace (7)

tempo	frequência
$-\text{t}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1 \longrightarrow$$

massa, mola amortecedor sujeito a um degrau, sem velocidade inicial e partindo da posição xo



CI $\rightarrow$ $x(0) = x_0$ $\quad\quad$ $\dot{x}(0) = 0$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2 X(s) - s\,x(0) - \cancel{\dot{x}(0)}^{\,0}$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(3\dot{x}) = 3\mathcal{L}(\dot{x}) = 3[sX(s) - x_0]$

$\rightarrow$ $2\mathcal{L}(x) = 2X(s)$

$\rightarrow$ $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

$\therefore$ $(s^2 + 3s + 2)X(s) = (s+3)x_0 + \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\,x_0 + \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\quad\right] x_0}_{\substack{\text{homogênea} \\ \text{(transitório)}}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\quad\right]}_{\substack{\text{particular} \\ \text{(reg. perman.)}}} \longrightarrow \text{não têm nas tabelas!}$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

Polos: -1 e -2

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} x_0 + \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$$

Separando em frações parciais:

$$\therefore\ X(s) = \left(\frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{s+2}\right)x_0 + \frac{c}{s} + \frac{d}{(s+1)} + \frac{e}{(s+2)} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} & a = \frac{s+3}{s+2}\Big|_{-1} = 2 \ ; \quad b = \frac{s+3}{s+1}\Big|_{-2} = -1 \ ; \quad c = \frac{1}{s^2+3s+2}\Big|_{0} = 1/2 \\ & d = \frac{1}{s(s+2)}\Big|_{-1} = -1 \ ; \quad e = \frac{1}{s(s+1)}\Big|_{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow (1)$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$x(t) = 2x_0 e^{-t} - x_0 e^{-2t} + \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-t}(2x_0 - 1) + e^{-2t}\left(\frac{1}{2} - x_0\right) + \frac{1}{2}} \leftarrow \text{transitório + RP}$$

Sistema massa, mola, amortecedor super amortecido: não oscila.

Comandos de softwares:

- Raízes do polinômio D(s): roots (D)
- Autovalores de matriz: Scilab : spec(A) Matlab: eig(A)
- Resíduos da FT G(s): Scilab: pfss(G) Matlab: residue(G)
- Use o comando help na área de trabalho para conhecer os comandos . Ex. help eig

Exercícios para casa:
Achar as FTs e resolver as EDOs:

1) $2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0$; $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = 0$

2) $\dddot{x} + 2\ddot{x} + 7\dot{x} = \ddot{u} + 7\dot{u} + 5u$; $\ddot{x}(0) = 2$; $\dot{x}(0) = 1$; $x(0) = 9$

para $u(t) = 1$ $u(0) = 0$; $\dot{u}(0) = 0$