Exercício 2(a) da Lista 2

Verificar se $A = \{\underbrace{(1,2,3)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1,1)}_{v_2}, \underbrace{(0,3,2)}_{v_3}\}$ gera $\mathbb{R}^3$

Verificar se dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x v_1 + y v_2 + z v_3 = (a,b,c)$.

$$x(1,2,3) + y(1,-1,1) + z(0,3,2) = (a,b,c).$$

Isso leva ao sistema:

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x - y + 3z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 3 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array}\right]$$ e escalonando temos:

2a - 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 3 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-3L1]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 3 & b-2a \\ 0 & -2 & 2 & c-3a \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -L2/3 \\ -L3/2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & (2a-b)/3 \\ 0 & 1 & -1 & (3a-c)/2 \end{array}\right] \xrightarrow{L3-L2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & (2a-b)/3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(3a-c)}{2} - \frac{(2a-b)}{3} \end{array}\right]$$

O sistema equivalente ao original é então:

$$\begin{cases} x + y = a \\ y - z = \frac{(2a-b)}{3} \\ 0x + 0y + 0z = \frac{3a-c}{2} - \frac{(2a-b)}{3} \end{cases}$$

O sistema tem solução $\Leftrightarrow$ $\frac{3a-c}{2} - \frac{(2a-b)}{3} = 0$

$$\frac{3a-c}{2} - \frac{(2a-b)}{3} \iff 9a - 3c - 4a + 2b = 0$$

$$\iff 5a + 2b - 3c = 0$$

ou seja, o sistema tem sol. $\iff (a,b,c) \in$ ao plano de equação $5a + 2b - 3c = 0$.

E nesse caso as soluções são:

$$y = z + \frac{(2a-b)}{3} \quad \text{e} \quad x = a - z - \frac{(2a-b)}{3} = \frac{3a - 3z - 2a + b}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}(a + b - 3z), \quad z \in \mathbb{R}$$

As soluções são: $z = t$

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}(a+b-3t),\ t + \frac{(2a-b)}{3},\ t\right) \quad t \in R$$

$$= \left(\frac{a+b}{3}, \frac{2a-b}{3}, 0\right) + t(-1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Usando GA note que os vetores v_1, v_2, v_3 geram o plano de equações

$$5a + 2b - 3c = 0$$

Já que o vetor normal desse plano é $\vec{N} = (5, 2, -3)$ e

$$\langle \vec{N}, v_1 \rangle = \langle (5,2,-3),(1,2,3) \rangle = 5+4-9=0$$
$$\langle \vec{N}, v_2 \rangle = \langle (5,2,-3),(1,-1,1) \rangle = 5-2-3=0$$
$$\langle \vec{N}, v_3 \rangle = \langle (5,2,-3),(0,3,2) \rangle = 0$$

($\langle N, v_i \rangle$ é o produto escalar)

e então, v_1, v_2 e v_3 são todos paralelos ao plano de equações $5a + 2b - 3c = 0$.

Note que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD e por exemplo, $v_1 = v_2 + v_3$.

Exercício 9 (c) da Lista 2

Vamos analisar a equação vetorial

$$\underbrace{x(6,2,m)}_{v_1} + y\underbrace{(3, m+n, m-1)}_{v_2} = 0$$ e ver para quais valores de m e n ela tem apenas a solução trivial. O sistema é

$$\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 2x + (m+n)y = 0 \\ nx + (m-1)y = 0 \end{cases}$$

Matriz do sistema

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & m+n \\ n & m-1 \end{bmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \end{array} \xrightarrow{\frac{L1}{3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m+n \\ n & m-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-L1]{L2-L1}$$

(Note que sempre os vetores v_1, v_2 aparecem nas colunas da matriz.)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & m+n-1 \\ n-2 & m-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 - \frac{n-2}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & m+n-1 \\ 0 & m-2-\left(\frac{n-2}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Caso (1)

$m+n \neq 1$

Divida L2 por $m+n-1$

e Faça $L3' - \left((m-2)-\frac{(n-2)}{2}\right) L_1$
s

e obtenha

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o sistema equivalente é

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0$$

Caso (2) : ~~De~~ $m-2-\frac{(n-2)}{2} \neq 0$

Divida L_3 por $m-2-\frac{(n-2)}{2}$ e troque $L_2 \longleftrightarrow L_3$ e

faça L_3' a nova $L_3 - \left((m+n)-1\right) L_2$ e obtenha
s

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & (m+n-1) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema equivalente é o mesmo que o do caso (1)

Logo v_1 e v_2 são LI $\Longleftrightarrow$

$m+n \neq 1$ ou $m-2-\frac{(n-2)}{2} \neq 0$.

Note que v_1 e v_2 são LD se, e somente se, $9c - 3$

$$m + n = 1$$

e

$$m - 2 - \frac{(n-2)}{2} = 0 \iff 2m - 4 - n + 2 = 0$$

$$\iff 2m - n = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2m - n = 2 \\ m + n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = -2m + 2 \\ m - 2m + 2 = 1 \\ -m = -1 \Rightarrow m = 1 \\ \text{e } n = 0 \end{array}$$

$m = 1$ e $n = 0$

$\Rightarrow$

$v_1 = (6, 2, 0)$ e $v_2 = (3, 1, 0)$

São LI $\iff (m, n) \neq (1, 0)$