BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL FINITAMENTE GERADO

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.

Um subconjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma **base de V**

se: (1) $[B] = V$.

(2) B é LI.

Exemplos:

$\mathbb{R}^n$

$M_{m \times n}$

$P_n(\mathbb{R})$

TEOREMA: Todo espaço vetorial finitamente gerado tem uma base.

Dem:

Se $V = \{0\}$, por convenção, $B = \phi$.

Já colocamos $[\phi] = \{0\}$ e ϕ é LI, pois não há nenhum vetor no $\emptyset$ para contradiger a def. de LI.

Suponha $V \neq \{0\}$ e que $S = \{u_1, ---, u_m\}$ é tal que $[S] = V$. Como $V \neq \{0\}$, temos que ao menos um dos vetores $u_i \neq 0$.

Se S é LI $\Rightarrow S$ é base de V.

Se não, um dos vetores de S é CL dos outros.

Digamos que seja u_m

Então $S_1 = S - \{u_m\}$ é tal que $[S_1] = [S]$,

Se S_1 é LI, OK, senão, um dos vetores de S_1 vai ser CL dos outros. $S_1 - \{v_{m-1}\}$. Então

↳ digamos que seja

Se $S_2 = S_1 - \{v_{n-1}\}$, $[S_2] = [S_1] = [S] = V$

E assim vai, até encontrarmos

$B \subset S$, B . LI e $[B] = V$.

Como ao menos um dos vetores de S é $\neq 0$, S ⊇ um conjunto LI, mesmo que ele seja unitário!

Outro modo:

Suponha que $[S] = V$ e $S \neq \{0\}$

$S = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $[S] = V$

Tome B o maior conjunto LI contido em S.

Então $B \cup \{v_j\}$, v_j em S, é LD

$\Rightarrow v_j$ é CL de vetores de S.

Como $[S] = V$, $[B] = V$.

Processo prático para extrair uma base de um conjunto gerador

$S = \{(1,1,1), (1,2,1), (2,3,2), (1,4,2)\}$ gera $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1(1,1,1) + x_2(1,2,1) + x_3(2,3,2) + x_4(1,4,2) = (0,0,0)$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & \end{array} \end{array}$$

$v_3 = v_1 + v_2$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = -x_3$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$

$x_4 = 0$

TEOREMA: Se $[u_1, \dots, u_m] = V$, então todo subconjunto de V com mais do que m vetores é LD.

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n > m$.

Mostrar que S é LD.

Queremos analisar a equação vetorial

$$\boxed{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0.}$$

Mas cada $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$, já que $V = [u_1, \dots, u_m]$,

$$x_1 \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{i1} u_i + x_2 \sum_{i=1}^{m} a_{i2} u_i + \dots + x_m \sum_{i=1}^{m} a_{in} u_i = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) u_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}) u_2$$

$$+ \dots + (x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn}) u_m = 0.$$

Consideramos então o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{— — — — — — — —} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Esse é um sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações. Então admite solução NÃO trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Voltando a (*) temos que a equação vetorial admite solução não trivial.

Logo S é LD.