AULA MECÂNICA 19/10

- QUANTIDADE DE MOVIMENTO
- MOMENTO ANGULAR
- SISTEMAS CONSERVATIVOS

MOVIMENTO DE 1 PONTO MATERIAL NUM SISTEMA MECÂNICO.

- ESTUDO DE FORÇAS CENTRAIS.

FORÇA CENTRAL

→ EXISTE ENERGIA POTENCIAL (CAMPO É CONSERVATIVO?

→ PRESERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR.

→ MOVIMENTO PLANAR.

→ LEI DAS ÁREAS.

→ LEI POTENCIAL $-\frac{K}{r}$ ⇒ SOLUÇÃO ERA UMA ELIPSE. COM UM DOS FOCOS ORIGEM.

Digitalizado com

2

SISTEMAS MECÂNICOS COM N PONTOS MATERIAIS.

N PONTOS DIFERENTES.
CADA PONTO POSSUI SUA PRÓPRIA MASSA.

MASSAS $m_1, m_2, \dots, m_N$. TODAS EM $(0, +\infty)$.

SISTEMA DE FORÇAS É POSICIONAL.

SE

$$\mathbb{R}^{3N} = (\mathbb{R}^3)^N$$

$$F : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{3N}. \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$$

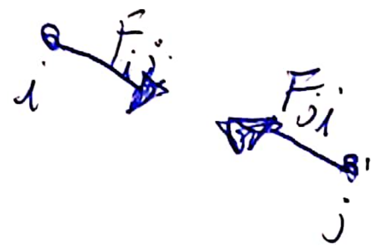
F DEPENDE SÓ DE $X = (X_1, X_2, \dots X_N)$

ONDE CADA $X_i \in \mathbb{R}^3$.

$$m_i \ddot{X}_i = F_i(X), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Digitalizado com

• FORÇAS DE INTERAÇÃO



F_{ij} É A FORÇA NO "PONTO i" POR CAUSA DO "PONTO j"

FORÇA DE INTERAÇÃO SÃO FORÇAS

$$F_{ij} : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^{3} \quad \text{ONDE } i \neq j$$

TAIS QUE.

$$F_{ij}(X) = -F_{ji}(X)$$

$$\text{E} \quad F_{ij}(X) = \lambda(X)(X_i - X_j).$$

$$\text{ONDE } \lambda : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$$

Digitalizado com

A IDEIA É ESCREVER O SISTEMA DE FORÇAS POSICIONAIS

$$\Phi \qquad F: R^{3N} \to R^{3N}$$

COMO SENDO UMA COLEÇÃO DE FUNÇÕES:

$$F_{ij}: R^{3N} \to R^3 \qquad i \neq j \quad 1 \leq i, j \leq N$$

$$F'_i: R^{3N} \to R^3 \qquad 1 \leq i \leq N.$$

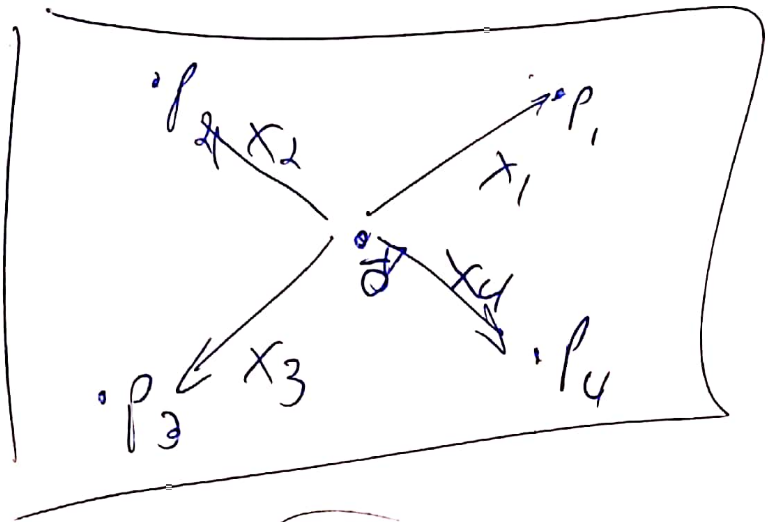
DE TAL FORMA QUE:

$$\boxed{F_i = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} F_{ij} + F'_i}$$

FORÇA EXTERNA

UM SISTEMA MECÂNICO É FECHADO POR FORÇAS EXTERNAS SE SÓ POSSUI FORÇAS DE INTERAÇÃO.

CENTRO DE MASSA DO SISTEMA. 5



$$CM(t) = \frac{\sum M_i X_i(t)}{\sum M_i}$$

DEFINIÇÃO CENTRO DE MASSA.

QUANTIDADE DE MOVIMENTO DO MEU SISTEMA

$$P(t) = \sum_{i=1}^{N} M_i \dot{X}_i(t)$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{i=1}^{N} M_i \ddot{X}_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} F_i(x) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} F_{ij}(x) + F_i'(x) \right).$$

COMO

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{N} F_{ij} = 0$$

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^{N} F_i'(x)$$

LINHA NÃO É DERIVADA EM MECÂNICA, DERIVADA COM TEMPO É (•)

COROLÁRIO! SE O SISTEMA FOR FECHADO A QUANTIDADE DE MOVIMENTO TOTAL É CONSTANTE.

$$\dot{CM}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \dot{X}_i(t)}{\left(\sum_{i=1}^{N} M_i\right)} = \frac{P(t)}{\sum_{i=1}^{N} M_i}.$$

$$M_T = \sum_{i=1}^{N} M_i$$

MASSA TOTAL

$$M_T \cdot \dot{CM}(t) = P. \Rightarrow \boxed{M \cdot \ddot{CM}(t) = \sum_{i=1}^{N} F_i'(X)}$$

Digitalizado com

MOMENTO ANGULAR.

MOMENTO ANGULAR DE UM PONTO. X_i

$$M = (m_i X_i) \wedge \dot{X}_i$$

MOMENTO ANGULAR TOTAL DE UM SISTEMA DE N PONTOS.

$$M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N} (m_i X_i(t) \wedge \dot{X}_i(t)).$$

QUEM É $\dot{M}(t) =$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{m_i \dot{X}_i \wedge \dot{X}_i}_{0} + m_i X_i \wedge \ddot{X}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i X_i \wedge \ddot{X}_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \wedge (m_i \ddot{X}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \wedge F_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \wedge F_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i \wedge F_{ij} =$$

Digitalizado com

MAS $\cancel{X_j \wedge F_{i,j} + X_i \wedge F}$

$$X_j \wedge F_{ji} + X_i \wedge F_{ij} =$$

$$X_j \wedge -(F_{ij}) + X_i \wedge F_{ij} =$$

$$\underbrace{(X_i - X_j) \wedge F_{ij}}_{\text{PARALELOS}} = 0$$

LOGO

$$\dot{M}(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i \wedge F_i'(X).$$

E SE O SISTEMA FOR FECHADO,

$\boxed{M(t) \text{ É CONSTANTE.}}$

Digitalizado com

ENERGIA CINÉTICA

DEFINIÇÃO

A ENERGIA CINÉTICA DO PONTO i É

$$T_i = \cancel{\frac{1}{2} m_i \|\dot{x}_i\|} \; \frac{1}{2} m_i \langle \dot{x}_i, \dot{x}_i \rangle.$$

$$T_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,[0, +\infty).$$

DEFINIÇÃO

$T : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$. ENERGIA CINÉTICA DO SISTEMA

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \langle \dot{x}_i, \dot{x}_i \rangle}{2}.$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \dot{x}_i, \ddot{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \dot{x}_i, m_i \ddot{x}_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle \dot{x}_i, F_i(x) \rangle.$$

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} \langle \dot{x}_i, F_i(x) \rangle \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{x}_i, F_i(x) \rangle \, dt.$$

Digitalizado com

LOGO A VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TOTAL É

$$T(\lambda_1)-T(\lambda_0)=\sum_{i=1}^{N} W(F_i, X_i).$$

TRABALHO DA FORÇA F_i SOBRE A CURVA X_i.

TRABALHO DA FORÇA $F \in R^{3N}$.

TRABALHO DE F NUMA CURVA.

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{3N}.$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_N)$$

$$\gamma_i \in R^3$$

$$W(F,\gamma) = \sum_{i=1}^{N} \int_a^b \langle F_i, \dot\gamma_i \rangle dt.$$

$$T(\lambda_1)-T(\lambda_0) = W(F,X).$$

Digitalizado com

SISTEMA CONSERVATIVO

SE: AS FORÇAS F_i DEPENDEM APENAS DAS POSIÇÕES, E.

$$\forall \gamma : [a,b] \to R^{3N} \quad C^1.$$

$W(F,\gamma)$ DEPENDE APENAS DE $\gamma(a)$ E $\gamma(b)$.

~~NÉ~~ MOSTRAMOS, COMO ANTES, QUE SE O SISTEMA É CONSERVATIVO, EXISTE UMA FUNÇÃO

$U : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ TAL QUE.

$$\nabla U(x) = (-F_1(x), -F_2(x), \dots, -F_N(x))$$

$$\nabla U(x) = -F \qquad F = -\nabla U.$$

~~ENUMÉ~~ E, NESTE CASO.

Digitalizado com

(12)

DEFINIMOS:

$$E: R^{3N} \times R^{3N} \to R.$$

$$E(X, \dot{X}) = T(\dot{X}) + U(X)$$

ENERGIA POTENCIAL

E SEGUE QUE, SOBRE UMA SOLUÇÃO DE (*)

E É CONSTANTE.

PROPOSIÇÃO: SE UM SISTEMA É FECHADO E TODAS AS FORÇAS DE INTERAÇÃO F_{ij} DEPENDEM APENAS DE $\|X_i - X_j\|$

ENTÃO O SISTEMA É CONSERVATIVO.

DEMONSTRAÇÃO:

~~DEFINO $W_{ij}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ POR~~

TEMOS QUE $F_{ij}(X) = \varphi_{ij}(\|X_i - X_j\|) \dfrac{X_i - X_j}{\|X_i - X_j\|}$

$$\varphi_{ij}: [0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Digitalizado com

DEFINO

$$W_{ij} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

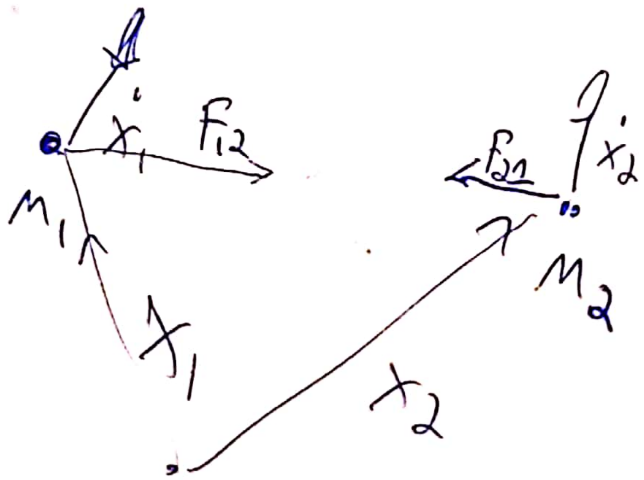
$$W_{ij}(y) = \int_1^y f_{ij}(s)\, ds.$$

$$U_{ij} = W_{ij}(\|X_i - X_j\|)$$

U_{ij} ESTÁ DEFINIDO APENAS P/ $i<j$

$$U = \sum_{i<j} U_{ij}(\|X_i - X_j\|).$$

PROBLEMA DOS DOIS CORPOS.



$$F_{12} = \frac{-G m_1 m_2}{\|X_1 - X_2\|^3}(X_1 - X_2)$$

$$F_{21} = -F_{12}.$$

TÊMOS ENTÃO:

$$Cm(t) = \frac{m_1 X_1(t) + m_2 X_2(t)}{m_1 + m_2}.$$

© DESCREVER.

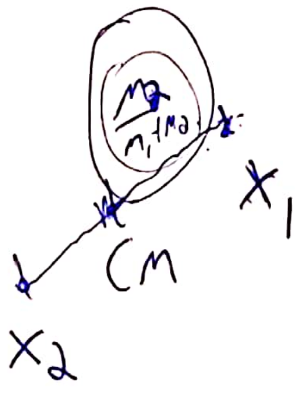
$$Y_1(t) = X_1(t) - Cm(t)$$

$$K = G m_1 m_2.$$

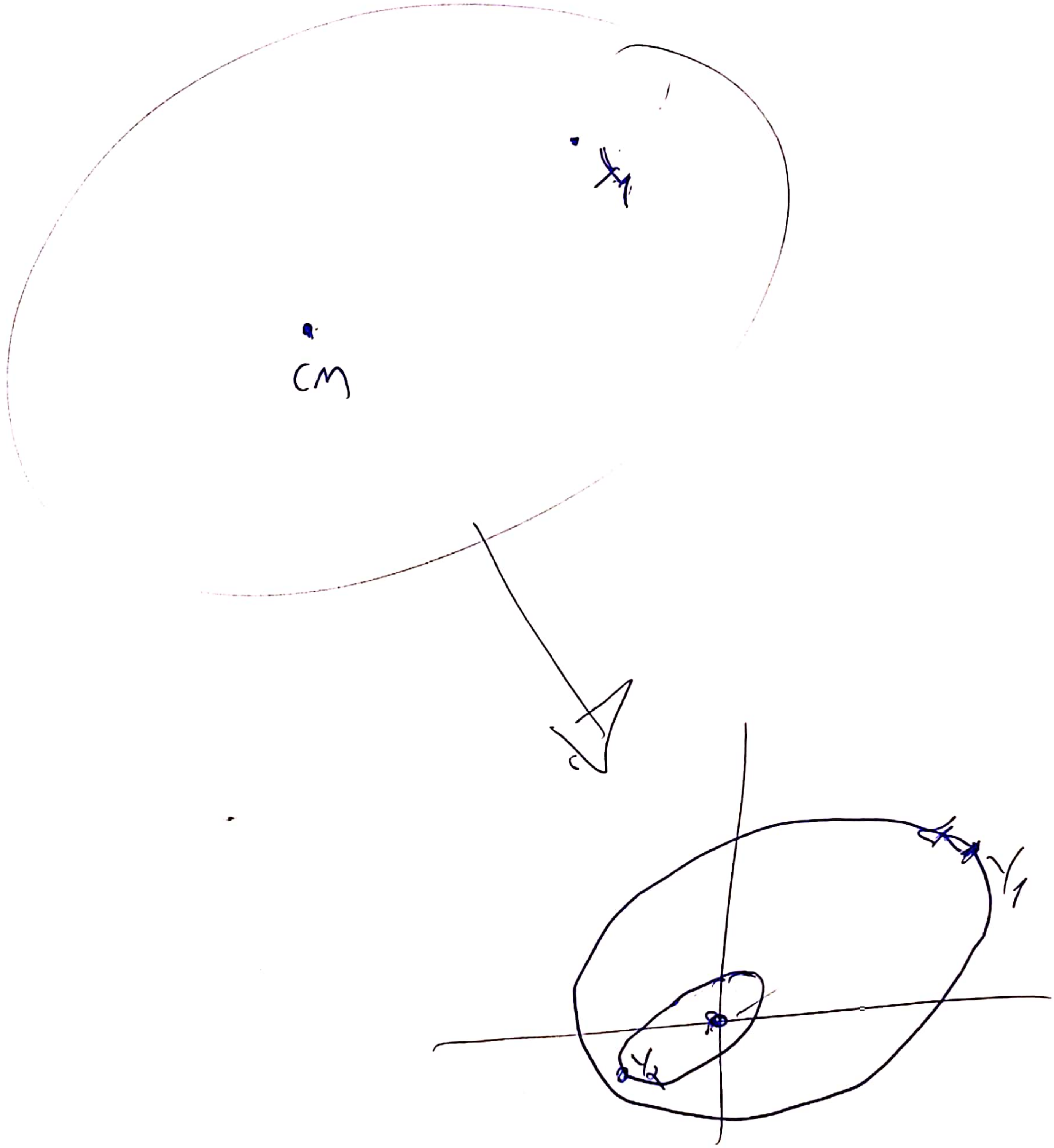
$$m_1 \ddot{Y}_1(t) = \ddot{X}_1(t)$$

$$m_1 \ddot{y}_1(t) = m_1 \ddot{x}_1(t) = -K \frac{(x_1 - x_2)}{\| x_1 - x_2 \|^3}$$

$$\boxed{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) X_1 - X_2 = \cancel{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\, Y_1}$$



$$m_1 \ddot{Y}_1 = -K \frac{1}{\| Y_1 \|^3} Y_1$$


x₁
CM
Y₁
Y₂