

2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 25 E 26

OBJETIVOS: APRESENTAR MAIS
APLICAÇÕES DA TF A EDPs E OU-
TROS TEMAS

(CONT.) 3.5 APLICAÇÕES A EDOs E EDPs

(iii) EQUAÇÃO DA ONDA 1D

TALVEZ A MAIS SIMPLES FORMU-
LAÇÃO DE UM PROBLEMA COM A EQ.
DA ONDA SEJA

$$\begin{cases} u_{tt} = v^2 \cdot u_{xx} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

DESLOCAMEN-
TO TRANSVER-
SAL

$\vec{v}_y = u_t \cdot \hat{y}$

$u(x, t)$

x

PULSO LONGITU-
DINAL

PERFIL INICIAL DA CORDA

PERFIL INICIAL DE VELOCI-
DADE

EXTREMIDADES PRESAS

CONDIÇÕES DE CONTORNO

01

COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DADAS, ESSE PROBLEMA ADMITE UMA ÚNICA SOLUÇÃO, OBTENÍVEL POR SÉRIES DE FOURIER. PORÉM, A TF REVELA ALGUNS ASPECTOS DAS POSSÍVEIS SOLUÇÕES MESMO SEM DEFINIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO!

$$\tilde{u}(k, t) = \mathcal{F}[u(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{ikx} dx$$

$$u_{tt} = v^2 \cdot u_{xx} \xRightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{u}_{tt} = v^2 (-ik)^2 \cdot \tilde{u} = -(kv)^2 \tilde{u}$$

OSCILADOR HARMÔNICO?!

MAS NÃO EM k ! $\rightarrow$ CTE EM t

$$\tilde{u}(k, t) = \tilde{f}(k) \cos(kvt) + \frac{\tilde{g}(k)}{kv} \sin(kvt)$$

$$= \tilde{A}(k) e^{+ikvt} + \tilde{B}(k) e^{-ikvt},$$

com

$$\begin{cases} \tilde{A}(k) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{f}(k) + \frac{\tilde{g}(k)}{ikv} \right\} \\ \tilde{B}(k) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{f}(k) - \frac{\tilde{g}(k)}{ikv} \right\} \end{cases},$$

POIS $u(x,0) = f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{u}(k,0) = \tilde{f}(k)$

E $u_t(x,0) = g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{u}_t(k,0) = \tilde{g}(k).$

A INVERSÃO DE FOURIER É MAIS "TRANSPARENTE" COM $\tilde{A}(k)$ E $\tilde{B}(k)$:

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}(k,t)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} [\tilde{A}(k) e^{+ikvt}] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} [\tilde{B}(k) e^{-ikvt}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) e^{-ik(x-vt)} dk +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(k) e^{-ik(x+vt)} dk =$$

$$= [A(x)]_{x \rightarrow x-vt} + [B(x)]_{x \rightarrow x+vt} =$$

$$= A(x-vt) + B(x+vt)$$

SOLUÇÃO DE D'ALEMBERT!

(iv) EQUILÍBRIO NO (SEMI) PLANO COM CONDIÇÃO DE DIRICHLET: POTENCIAL ELETROSTÁTICO OU DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA (ASSINTÓTICA NO TEMPO)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & (\text{EQ. LAPLACE}) \\ u(x, 0) = f(x) \rightarrow \text{FUNÇÃO DADA NA FRONTEIRA P/ } u(x, y) \\ x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ |u(x, \infty)| < \infty \rightarrow \text{SOLUÇÃO LIMITADA} \end{cases}$$

→ DIRICHLET

$$\tilde{u}(k, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{ikx} dx$$

$$u(x, 0) = f(x) \xRightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{u}(k, 0) = \tilde{f}(k)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow (-ik)^2 \tilde{u}(k, y) + \tilde{u}_{yy}(k, y) = 0$$

NÃO É OSC. HARMÔNICO!

$$\tilde{u}(k, y) = C_1 e^{+ky} + C_2 e^{-ky} \quad C_1 = C_1(k) \text{ e } C_2 = C_2(k)$$

$$\text{SE } k > 0, e^{ky} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty \quad \text{SE } k < 0, e^{-ky} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$$

$$\tilde{u}(k, y) = C(k) e^{-|k|y}$$

QDO $y=0 \dots$

$$\tilde{u}(k, y) = \tilde{f}(k) e^{-|k|y}$$

JÁ VIMOS QUE $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2 + k^2}$

E QUE $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2 + x^2}\right) = e^{-a|k|}$.

DEFININDO $\tilde{g}_y(k) = e^{-y|k|}$, $g_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2}$

COMO $\tilde{u}(k, y) = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}_y(k)$, POR CONVOLUÇÃO,

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g_y(x - \xi) d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

ESSA É A FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON
PARA O SEMIPLANO E $\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$ É O
NÚCLEO DE POISSON.

3.6 MAIS CONVOLUÇÃO, CORRELAÇÃO E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA / PROBABILIDADE

JÁ VIMOS QUE

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)] = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k),$$

$$\text{ONDE } (f * g)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi.$$

EQUIVALENTEMENTE,

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k) \tilde{g}(k)] = (f * g)(x).$$

PELA SIMETRIA DA CONVENÇÃO QUE ADOTAMOS PARA A TF,

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x) \cdot g(x)] = (\tilde{f} * \tilde{g})(k)}.$$

CONJUGADO

COMPLEXO

CONVOLUÇÃO!

CROSS

CORRELATION

DEFINIMOS TAMBÉM A CORRELAÇÃO

$$(f \star g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)} \cdot g(x + \xi) d\xi = \overline{f(-x)} * g(x)$$

DE FATO, NOTE QUE $\overline{f(-x)} = h(x)$

$$\underbrace{\overline{f(-x)}}_{\equiv h(x)} * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\overline{f(-\theta)}}^{=h(\theta)} \cdot g(x-\theta) d\theta =$$

$$\theta \rightarrow \xi \equiv -\theta \quad \leftarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\xi)} \cdot g(x+\xi) d\xi.$$

NOTE TAMBÉM QUE

$$\mathcal{F}[\overline{f(-x)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{ikx} dx$$

$$x \rightarrow -x \quad \leftarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{i(-k)x} dx = \overline{\tilde{f}(-k)}$$

E QUE

$$\mathcal{F}[\overline{f(x)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{i(-k)x} dx = \overline{\tilde{f}(-k)},$$

DE MODO QUE

$$\boxed{\mathcal{F}[\overline{f(-x)}] = \overline{\tilde{f}(k)}} \quad \text{E}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[(f \star g)(x)] = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)}$$

WIENER-KHINCHIN

· KHINTCHINE?

07

É CONVENIENTE CONTEMPLARMOS
O TEOREMA DE WIENER-KHINCHIN NA FOR-
MA

$$(f \star g)(t') = \mathcal{F}^{-1}[\overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \tilde{g}(\omega)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t'+t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} g(t'+t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega}$$

E CONSIDERARMOS O QUE OCORRE SE

(a) $t' = 0$, (b) $f = g$ E (c) AMBAS AS
ESCOLHAS.

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} \cdot g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \tilde{g}(\omega) d\omega$$



$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle$$

PRESERVA PRODUTO INTERNO!!!

$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ É UMA ISOMETRIA
 (OU UM OPERADOR UNITÁRIO) NO ESPAÇO
 VETORIAL COMPLEXO DAS FUNÇÕES QUADRA-
 DRADO INTEGRÁVEIS, MUNIDO DO PRODUTO
 INTERNO $\langle \cdot, \cdot \rangle = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$
 DADO POR

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} \cdot f(t'+t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 e^{-i\omega t'} d\omega$$

///

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}^{-1}(\underbrace{|\tilde{f}(\omega)|^2}_{\text{ESPECTRO DE POTÊNCIA}}) \Rightarrow$$

$C(t')$

FUNÇÃO DE
AUTO-CORRELAÇÃO

ESPECTRO DE
POTÊNCIA
(POWER SPECTRUM)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[C(t')] = \sqrt{2\pi} \cdot |\tilde{f}(\omega)|^2}$$

APLICAÇÕES: CAP. 10, JAMES SETHNA, "STATIS-
 TICAL MECHANICS - ENTROPY, ORDER PARAMETER" 09

TERS, AND COMPLEXITY".

EXPERIMENTOS MEDEM CORRELAÇÕES!

(C) IDENTIDADE DE PLANCHEREL (OU DE PARSEVAL - PLANCHEREL)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

SE $|f(t)|^2$ REPRESENTAR A "ENERGIA" DE UM SINAL NO INSTANTE t , A ENERGIA INTEGRADA NO TEMPO É IGUAL À INTEGRAÇÃO (NAS FREQUÊNCIAS) DA ENERGIA POR UNIDADE DE FREQUÊNCIA NA FREQUÊNCIA ω , $|\tilde{f}(\omega)|^2$, RAZÃO PELA QUAL TALVEZ O MELHOR NOME PARA $|\tilde{f}(\omega)|^2$ SEJA DENSIDADE ESPECTRAL.

FUNÇÕES DE ONDA QUÂNTICAS, NAS REPRESENTAÇÕES DE POSIÇÃO, $\psi(\vec{r}, t)$,

E DE MOMENTO, $\tilde{\psi}(\vec{p}, t)$, SÃO RELACIONADAS POR UMA TRANSFORMADA DE FOURIER E A IDENTIDADE DE PLANCHEREL PERTINENTE,

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = \int |\tilde{\psi}(\vec{p}, t)|^2 d^3p = 1,$$

EXPRESSA A CONSERVAÇÃO DA PROBABILIDADE, EM QUALQUER REPRESENTAÇÃO.