



Mecânica I – PME3100

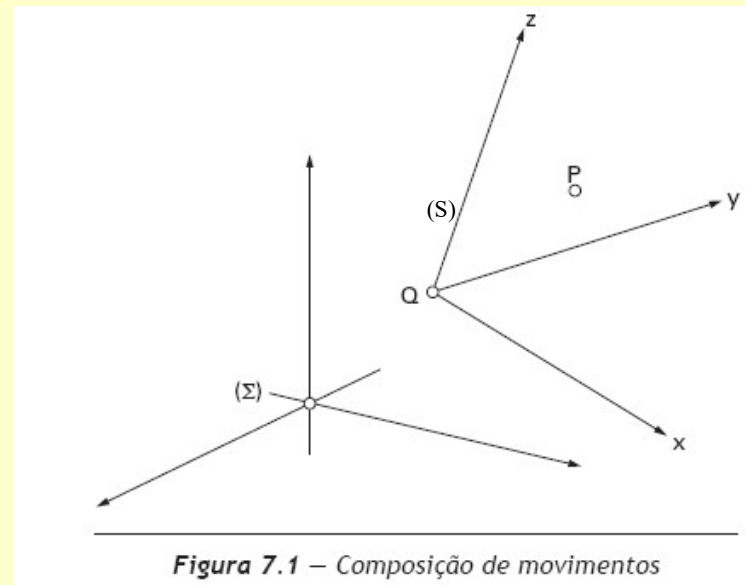
Aulas 15 e 16

Capítulo 7 – Composição de Movimentos

**Capítulo 7****7.1 Definições**7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação**7.1 - Definições**

O referencial S onde se dá o movimento de um ponto P , não é mais admitido como fixo, mas agora ele se move em relação a outro referencial Σ , este sim, considerado como fixo.

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z.
2011, *Mecânica Geral*, 3ª edição,
Editora Edgard Blücher Ltda.



Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de velocidades

7.3 Composição de acelerações

7.4 Composição de vetores de rotação

- **Movimento relativo** do ponto P é seu movimento em relação ao referencial móvel S
- **Movimento absoluto** de P é o que ele possui em relação ao referencial fixo Σ
- **Movimento de arrastamento** de P é o movimento do ponto ligado ao referencial móvel, S , que coincide com P . (É o movimento que P teria se fosse ligado fixamente ao referencial móvel e em consequência “arrastado” por ele)



Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades

7.3 Composição de
acelerações

7.4 Composição de vetores
de rotação

Outra nomenclatura

- **Movimento relativo** ou movimento componente
- **Movimento absoluto** ou movimento resultante
- **Movimento de arrastamento** ou movimento componente

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de velocidades****7.3 Composição de acelerações****7.4 Composição de vetores de rotação****7.2 – Composição de velocidades**

Seja $Q\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ o referencial móvel

$$P = Q + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

x, y, z são funções de t

$Q\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ são também funções de t , mas dependem apenas da posição do referencial S (móvel)

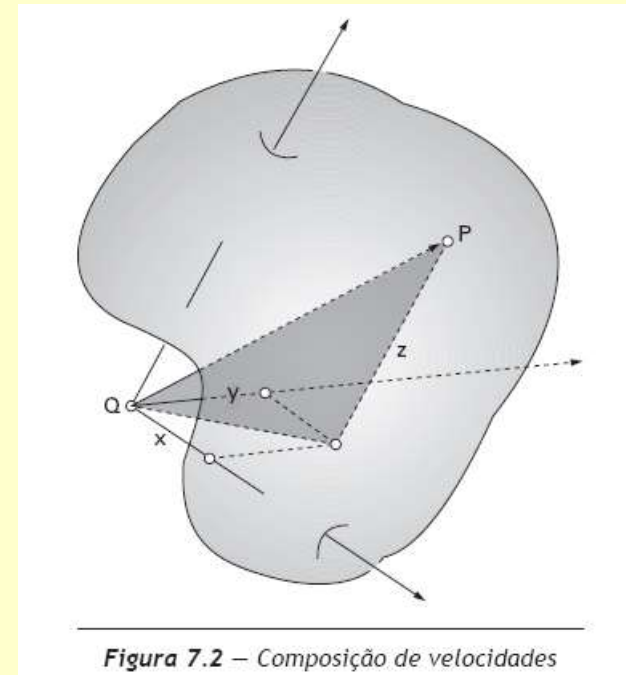


Figura 7.2 – Composição de velocidades

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

$$P = Q + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Sendo

$\bar{v} \Rightarrow$ Velocidade absoluta de P

$\bar{v}_Q \Rightarrow$ Velocidade absoluta de Q

$$\bar{v} = \bar{v}_Q + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

$$\bar{v} = \bar{v}_Q + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$$

A velocidade relativa será

$$\bar{v}_r = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$$

A velocidade de arrastamento será

$$\bar{v}_a = \bar{v}_Q + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_a$$

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

Este resultado pode ser generalizado para um número finito de movimentos componentes.

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_{a_1} + \bar{v}_{a_2} + \dots + \bar{v}_{a_n}$$

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

7.3 – Composição de acelerações

Considera-se aqui apenas o caso de dois movimentos componentes

$$\bar{v} = \bar{v}_Q + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} + 2\dot{x}\dot{\bar{i}} + 2\dot{y}\dot{\bar{j}} + 2\dot{z}\dot{\bar{k}}$$

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

$$\bar{a} = \bar{a}_Q + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + \dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}} + 2\dot{x}\dot{\bar{i}} + 2\dot{y}\dot{\bar{j}} + 2\dot{z}\dot{\bar{k}}$$

A aceleração relativa será

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}$$

A aceleração de arrastamento será

$$\bar{a}_a = \bar{a}_Q + \dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}$$

A aceleração de Coriolis (ou complementar) será

$$\bar{a}_c = 2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}})$$

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_a + \bar{a}_c$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

Outra expressão para $\bar{a}_c$

$$A = Q + \bar{i}$$

$\bar{\omega}_a \Rightarrow$ Vetor rotação do referencial $\mathcal{S}$
durante seu movimento

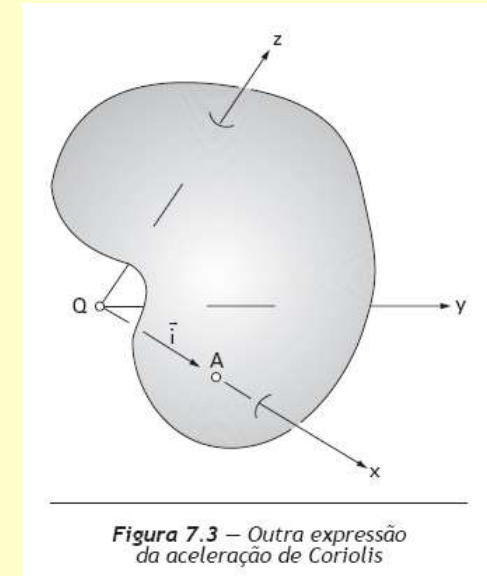


Figura 7.3 – Outra expressão
da aceleração de Coriolis

Considerando apenas o movimento de arrastamento

$$\bar{v}_A = \bar{v}_Q + \bar{\omega}_a \wedge (A - Q) = \bar{v}_Q + \bar{\omega}_a \wedge \bar{i}$$

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

Por outro lado, derivando a primeira equação do *slide* anterior em relação à t

$$\bar{v}_A = \bar{v}_Q + \dot{\bar{l}}$$

Comparando as duas últimas equações $(\bar{v}_A = \bar{v}_Q + \bar{\omega}_a \wedge \bar{l})$

$$\dot{\bar{l}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{l}$$

Analogamente: $\dot{\bar{j}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{j}$ e $\dot{\bar{k}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{k}$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

Voltando na equação de $\bar{a}_c$

$$\{\bar{a}_c = 2(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k})\}$$

$$\bar{a}_c = 2(\dot{x}\bar{\omega}_a \wedge \bar{i} + \dot{y}\bar{\omega}_a \wedge \bar{j} + \dot{z}\bar{\omega}_a \wedge \bar{k})$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_a \wedge (\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k})$$

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_a \wedge \bar{v}_r$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação****7.4 – Composição de vetores de rotação**

Corpo rígido $\mathbf{R}$ em movimento em relação a um referencial $\mathbf{S}$, o qual, por sua vez, está em movimento em relação a um referencial fixo Σ .

$\bar{\omega}_r \Rightarrow$ Rotação de $\mathbf{R}$ em relação a $\mathbf{S}$

$\bar{\omega} \Rightarrow$ Rotação de $\mathbf{R}$ em relação a Σ

$\bar{\omega}_a \Rightarrow$ Rotação de $\mathbf{S}$ em relação a Σ

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

P e O dois pontos quaisquer de R

$$\bar{v}_{rp} = \bar{v}_{ro} + \bar{\omega}_r \wedge (P - O)$$

$$\bar{v}_{ap} = \bar{v}_{ao} + \bar{\omega}_a \wedge (P - O)$$

$$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge (P - O)$$

Lembrando que $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_a$

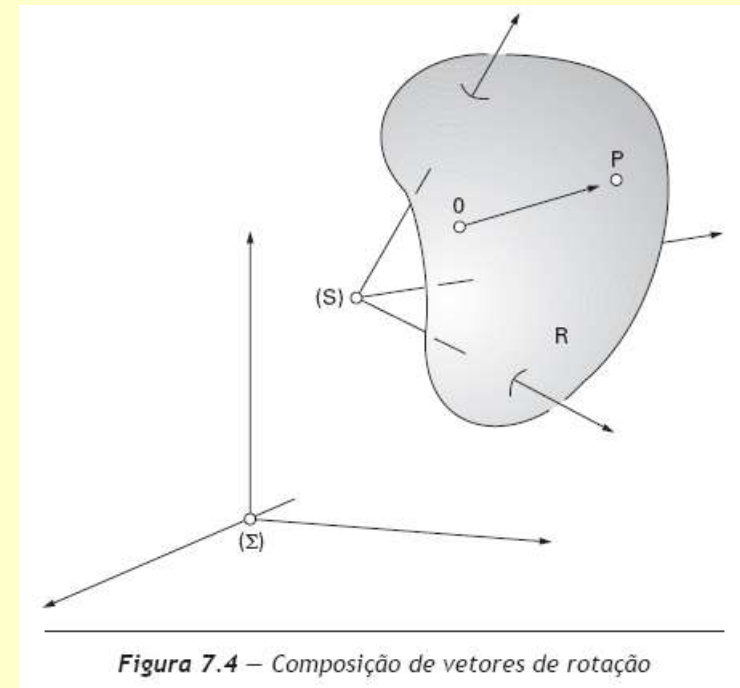


Figura 7.4 – Composição de vetores de rotação

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \vec{v}_{r_O} + \vec{\omega}_r \wedge (P - O) + \vec{v}_{a_O} + \vec{\omega}_a \wedge (P - O)$$

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \vec{v}_{r_O} + \vec{v}_{a_O} + (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a) \wedge (P - O)$$



$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a$$

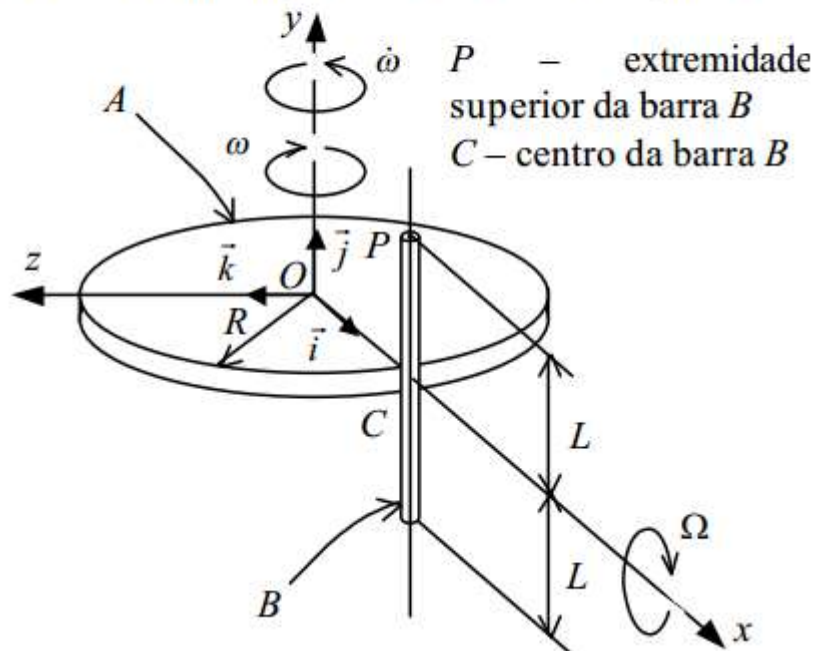
Assim como no caso de composição de velocidades, este resultado pode ser generalizado para um número finito de movimentos componentes.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{a_1} + \vec{\omega}_{a_2} + \dots + \vec{\omega}_{a_n}$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

E2 – prova 2 - ano 2000

(3,5 pontos) Questão 2 - O disco A de raio R gira em torno do eixo vertical y e a barra B de comprimento $2L$ está conectada ao disco por meio de um eixo horizontal que gira junto com o disco. A barra B gira em torno desse eixo com velocidade angular relativa ao disco igual a $-\Omega \vec{i}$, constante.



Na posição da figura o disco tem velocidade angular $-\omega \vec{j}$ e aceleração angular $\dot{\omega} \vec{j}$. Expressando as respostas na base do sistema de coordenadas $Oxyz$, solidário ao disco, pede-se para calcular:

- A velocidade absoluta do ponto C , a velocidade relativa do ponto P e a velocidade absoluta do ponto P .
- A aceleração absoluta do ponto C .
- A aceleração relativa do ponto P .
- A aceleração absoluta do ponto P .

**** Outra maneira de fazer a componente do arrastamento ****

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

Sobre a composição das acelerações angulares

Partindo de

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_a$$

Da lei de composição dos vetores de rotação (acima), resulta

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}_r + \dot{\bar{\omega}}_a = \frac{d}{dt} [\omega_{r_x} \bar{i} + \omega_{r_y} \bar{j} + \omega_{r_z} \bar{k}] + \dot{\bar{\omega}}_a$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

$$\dot{\vec{\omega}} = \left(\dot{\omega}_{r_x} \bar{i} + \dot{\omega}_{r_y} \bar{j} + \dot{\omega}_{r_z} \bar{k} \right) + \left(\omega_{r_x} \dot{\bar{i}} + \omega_{r_y} \dot{\bar{j}} + \omega_{r_z} \dot{\bar{k}} \right) + \dot{\vec{\omega}}_a$$

Lembra-se disto?

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{i}$$

$$\dot{\bar{j}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{j}$$

$$\dot{\bar{k}} = \bar{\omega}_a \wedge \bar{k}$$



$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \left(\omega_{r_x} \bar{\omega}_a \wedge \bar{i} + \omega_{r_y} \bar{\omega}_a \wedge \bar{j} + \omega_{r_z} \bar{\omega}_a \wedge \bar{k} \right) + \dot{\vec{\omega}}_a$$

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de
velocidades****7.3 Composição de
acelerações****7.4 Composição de vetores
de rotação**

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \bar{\omega}_a \wedge (\omega_{r_x} \bar{i} + \omega_{r_y} \bar{j} + \omega_{r_z} \bar{k}) + \dot{\vec{\omega}}_a$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \bar{\omega}_a \wedge \bar{\omega}_r + \dot{\vec{\omega}}_a$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a + \bar{\omega}_a \wedge \bar{\omega}_r$$

Capítulo 7

7.1 Definições

7.2 Composição de
velocidades7.3 Composição de
acelerações7.4 Composição de vetores
de rotação

O termo

$$\vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$$

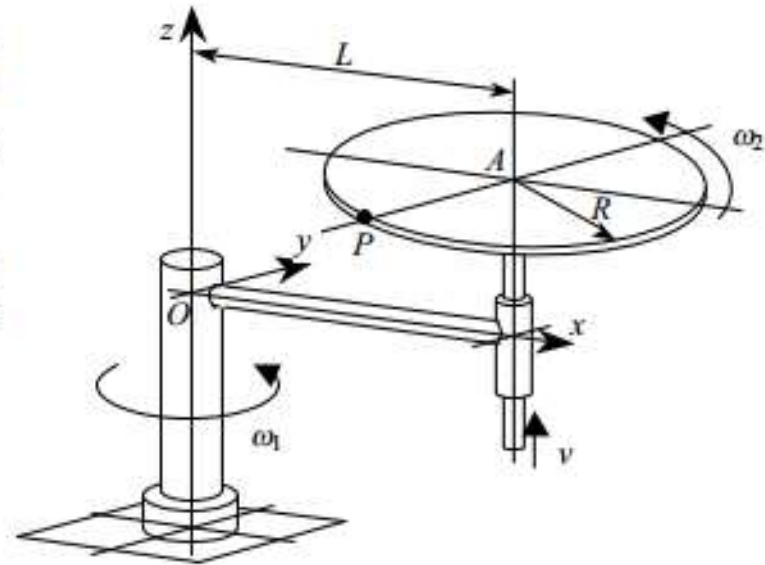
É análogo à aceleração complementar e é chamado *aceleração angular complementar de Resal*

**Capítulo 7****7.1 Definições****7.2 Composição de velocidades****7.3 Composição de acelerações****7.4 Composição de vetores de rotação**

E3 – prova 2 - ano 2006

3ª Questão (4,0 pontos) No mecanismo mostrado na figura, o ponto O é fixo, e a barra OD, de comprimento L, possui vetor de rotação $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ (constante) em relação a um referencial fixo. O disco de centro A e raio R possui vetor de rotação $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{k}$ e vetor aceleração angular $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2 \vec{k}$ em relação à barra OD. O ponto A possui velocidade $\vec{v} = v \vec{k}$ (constante) em relação à barra OD. O sistema de coordenadas Oxyz é fixo na barra OD e o vetor (P – A) é paralelo ao eixo Oy. Considerando a barra OD como referencial móvel, determine, para o instante da figura,

- as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P;
- as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P;
- o vetor de rotação absoluto e o vetor aceleração angular absoluto do disco de centro A.





PERGUNTAS?

