DERIVADAS PARCIAIS

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

OBJETIVO DA DERIVADA PARCIAL

- ✓ Estudar a taxa de variação de z, quando x e y variam;
- ✓ Em determinada condição será variado o x e o y permanecerá fixo e vice-versa;
- ✓ Aplicar o conceito de derivada parcial para otimizar funções

FIXANDO Y=Y0 E VARIANDO X

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x,y_0) - f(x_0 - y_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x,y_0)}{x - x_0}$$

FIXANDO X=X0 E VARIANDO Y

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x_0,y) - f(x_0 - y_0)}{y - y_0}$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}$$

Então tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

NOTAÇÃO PARA A DERIVADA PARCIAL

Existem diversas notações alternativas para derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x, podemos escrever f_1 ou D_1f (para indicar a derivação em relação à primeira variável) ou $\partial f / \partial x$.

Porém, $\partial f / \partial x$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais.

Considere os exemplos:

1- Determinar a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ de $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$.

2- Seja uma função de uma variável real, diferenciável e tal que $\phi'(1)=4$. Seja g(x,y) = $\phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

O gráfico z=f(a,b) representa uma superfície no espaço, a qual denominamos por S. Se (a,b,c) for um ponto de S, então C=f(a,b).

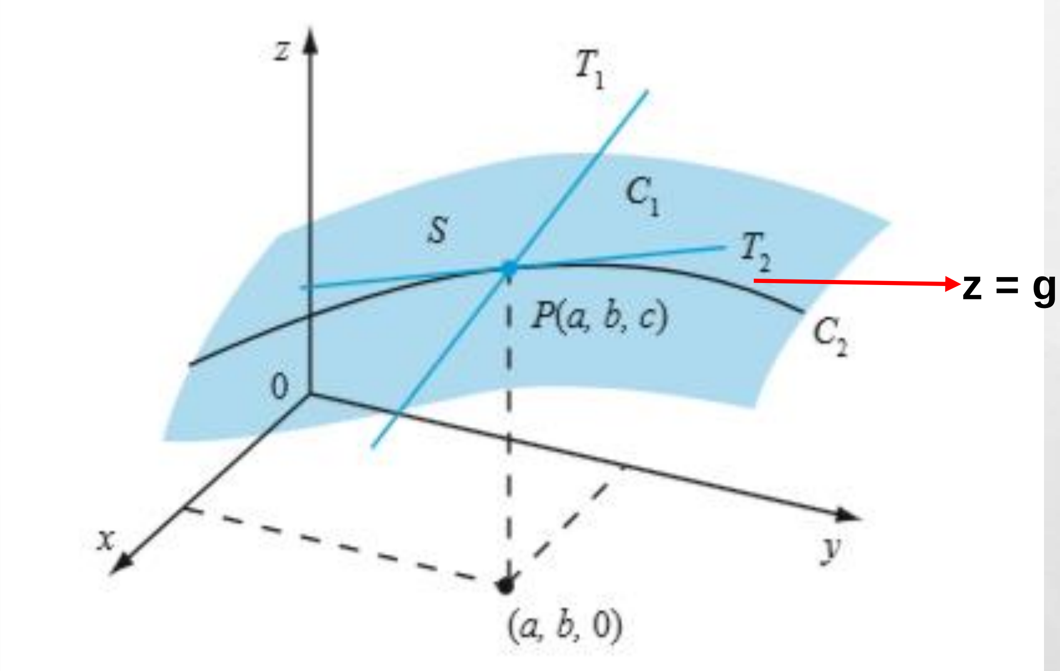


Figura 1

z = g(x) = f(x, y)

A derivada resulta na inclinação da reta tangente à curva no ponto em questão.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

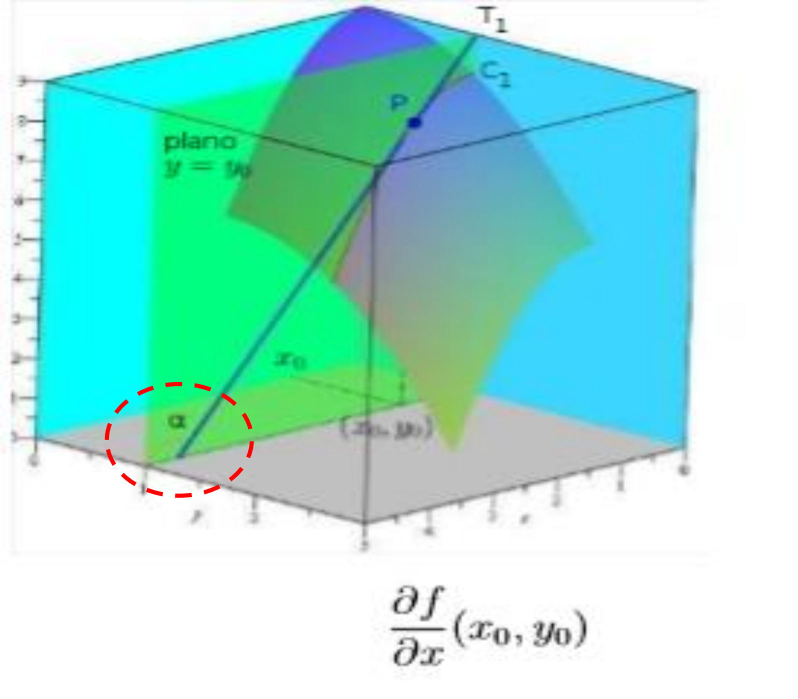


Figura 2

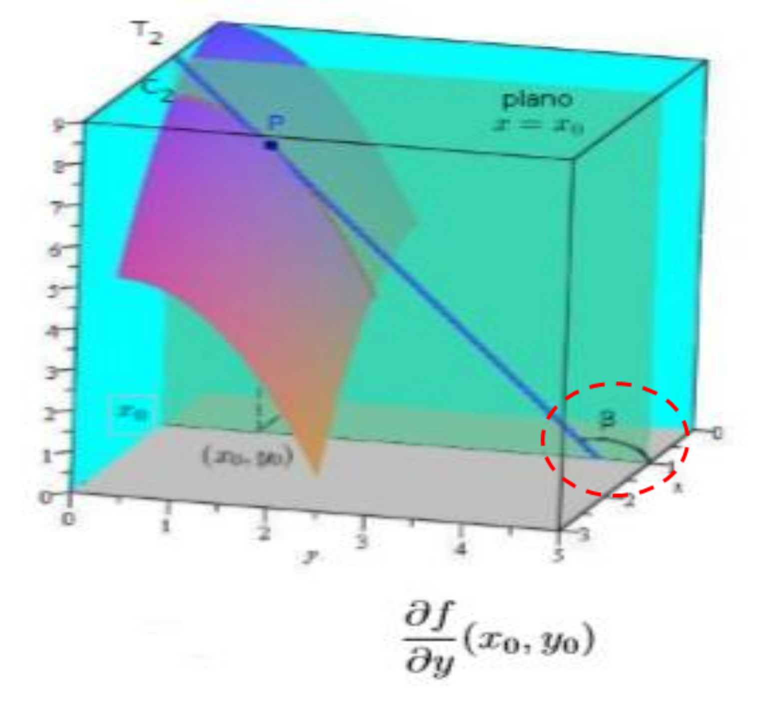


Figura 3

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

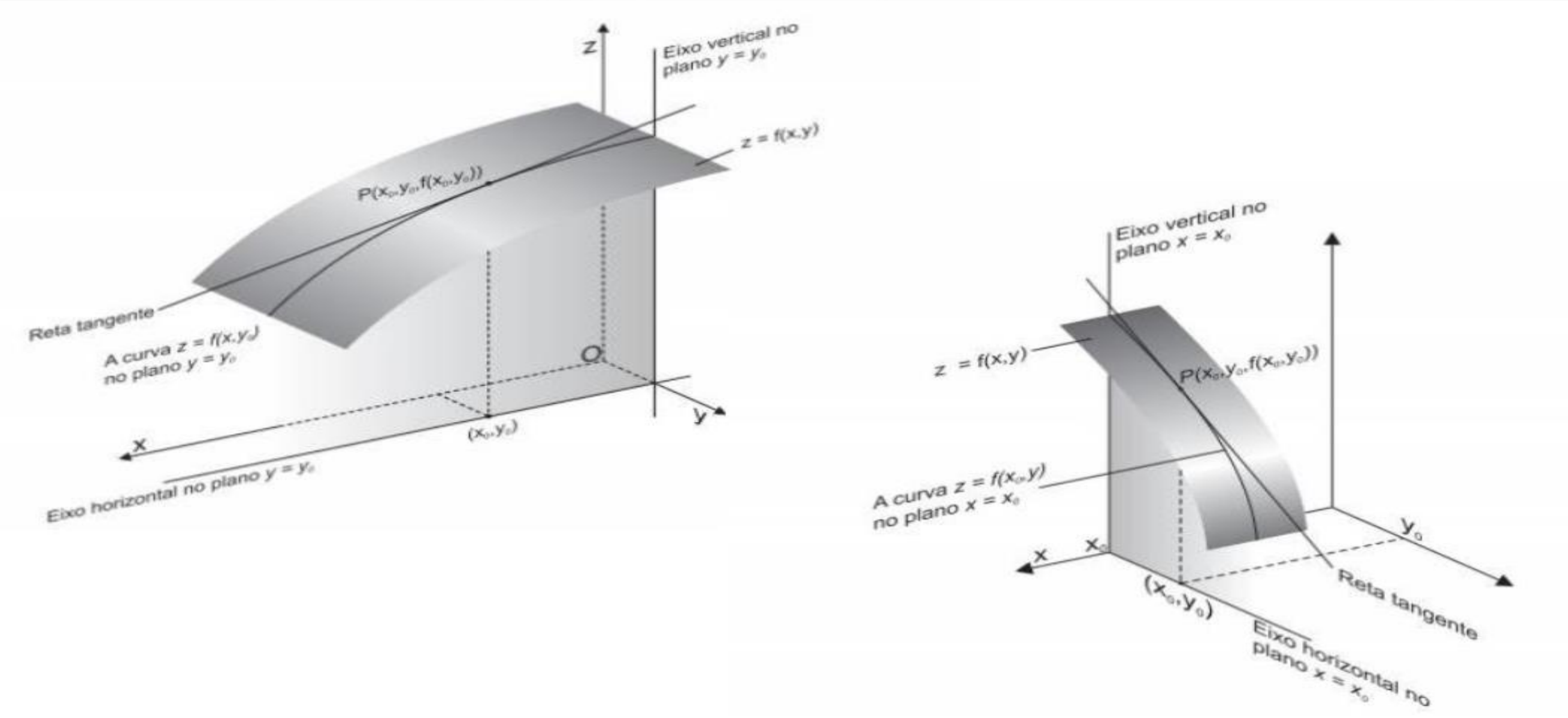


Figura 4

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

Considere os exemplos:

Determinar as seguintes derivadas,

$$3-\ f(x,y)=4-x^2-y^2;\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

$$4-\ f(x,y)=\cos\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$$

$$5-\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, se(x,y)\neq(0,0)\\ 0,\text{ se }(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais fx e fy são funções de duas variáveis, de modo que possamos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, denominadas derivadas de segunda ordem.

Se z = f(x, y) usamos a seguinte notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

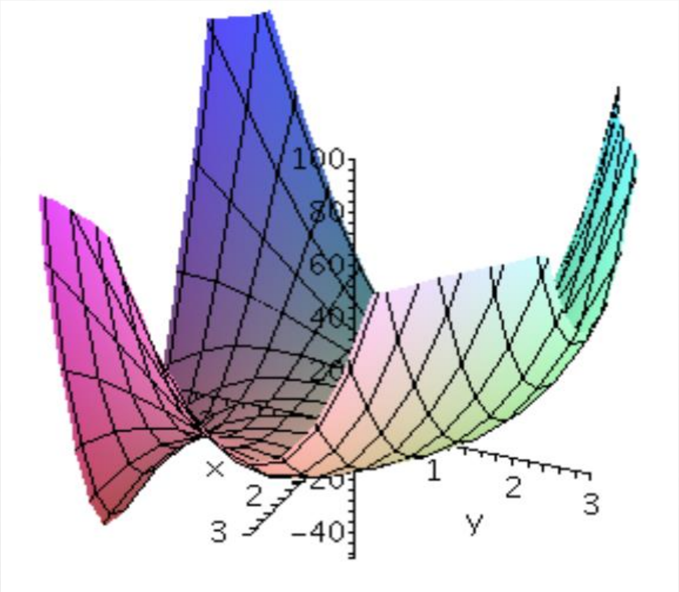
$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

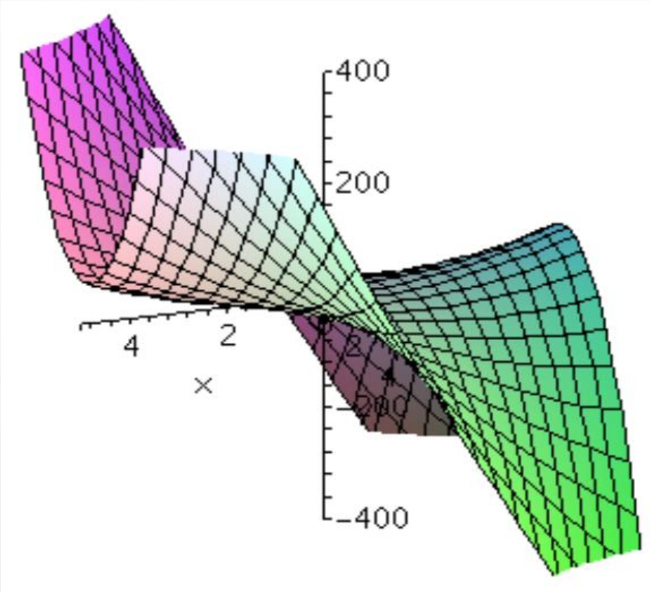
DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR

Considere os exemplos:
Determinar as seguintes derivadas,

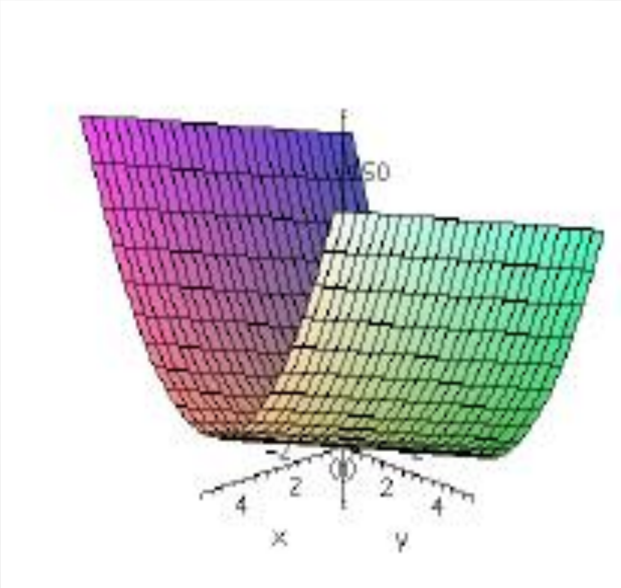
6- $z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$



$z = x^3 + 2y^3 + 3x^2y^2$

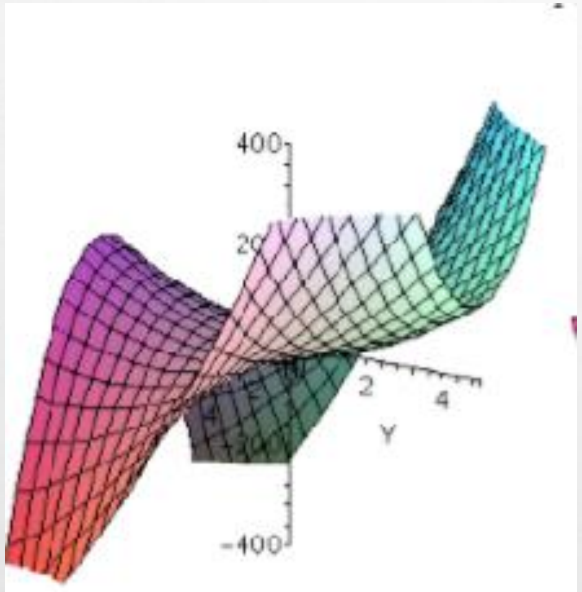


$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$

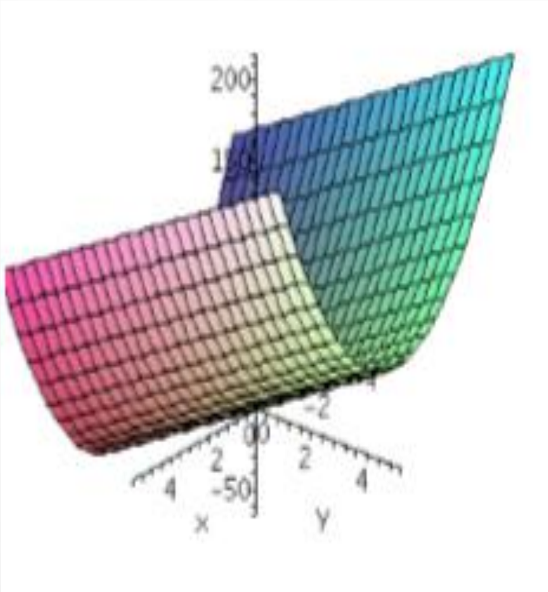


$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6y^2$

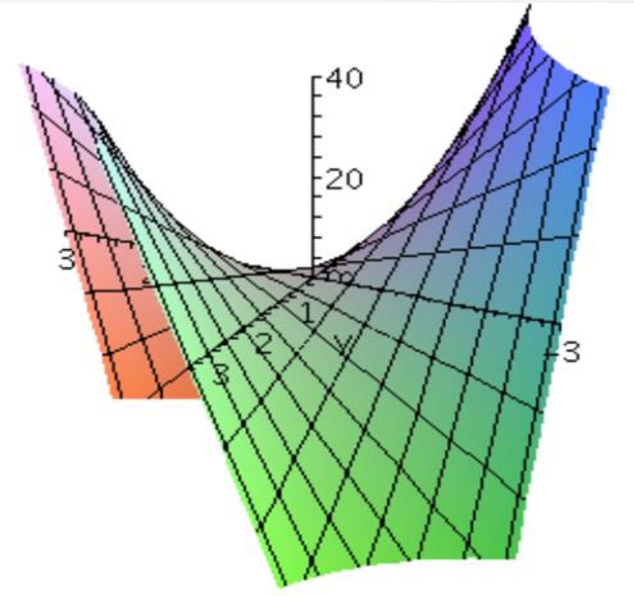
DERIVADA DE ORDEM SUPERIOR



$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2 + 6x^2y$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y + 6x^2$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 12xy$$

TEOREMA DE CLAIRAUT

Teorema de Clairaut Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas. Por exemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

e usando o Teorema de Clairaut podemos mostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ se essas funções forem contínuas.

TEOREMA DE SCHWARZ

Seja a f: AC R^2, A aberto. Se f for de classe C^2 em A.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Considere o exemplo:

8- Verificar se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $f_{xy} = f_{yx}$.

$$\mathbf{f(x,y) = x^4y^3 - y^4}$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

As derivadas parciais ocorrem em equações diferenciais parciais que exprimem leis Físicas. Se considerarmos a equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denominada de equação de Laplace, observa-se que a solução dessa equação é intitulada de <u>função harmônica</u>, importante no estudo da condução de calor, escoamento de fluido e potencial elétrico.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

De onde vêm as equações diferenciais parciais?

- a equação de Burger com viscosidade

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx},$$

que aparece em várias áreas da matemática aplicada, dentre elas modelagens de dinâmica de gases e de fluxo de tráfico.

- a equação de calor

$$u_t = k\Delta u,$$

usada para modelar a evolução temporal do temperatura de um corpo.

- as equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{dt} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla v + \nu\Delta v + f(x,t),$$

que é um sistema de equações diferenciais parciais que modela o movimento de um fluido, $v(x,t)$, $p(x,t)$ e $f(x,t)$ são o campo de velocidade, a pressão e a força externa no ponto x, no instante t.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

A **equação de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

descreve o movimento de uma onda, que pode ser do mar, um onda sonora, de som, luminosa ou se movendo em uma corda vibrante.

Considere os exemplos:

9- Determinar se as funções são solução da equação de Laplace

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

10- Mostre que a função $u=sen(kx).sen(akt)$ é solução da equação da onda $u_{tt}=a^2 u_{xx}$