

# ***Média Móvel e Métodos de Suavizamento – Parte 1***

**PNV-3421 – Processos Estocásticos**

Prof. Dr. João Ferreira Netto

# **Bibliografia Principal**

---

- Hanke, J.E & Reitsch A.G. (1998) Business Forecasting. 6th Edition, Prentice Hall, Upper Sadle River, NJ.

# Métodos

---

- Serão estudados métodos orientados pelos dados (“data-driven” methods).
  - Conseguem captar variações locais (oscilações) dos dados.
-

# Roteiro

---

1. Modelos Ingênuos ✓
  2. Média Simples ✓
  3. Média Móvel
  4. Média Móvel Dupla
  5. Suavizamento Exponencial
  6. Suavizamento Exponencial Duplo
  7. Suavizamento Exponencial com Ajuste de Tendência (Método de Holt)
  8. Suavizamento Exponencial com Ajuste de Tendência e Sazonalidade (Método de Winter)
-

# 1. Modelos Ingênuos

---

- Os métodos ingênuos assumem que o uso das informações mais recentes é a melhor forma de previsão.
- Na sua forma mais simples  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t$ , onde  $\hat{Y}_{t+1}$  é a previsão para o período  $t + 1$ , feita no período  $t$ .

$\hat{Y}_{t+1}$  — previsão p/  $t+1$

$Y_t$  — demanda de  $t$

---

# 1. Modelos Ingênuos

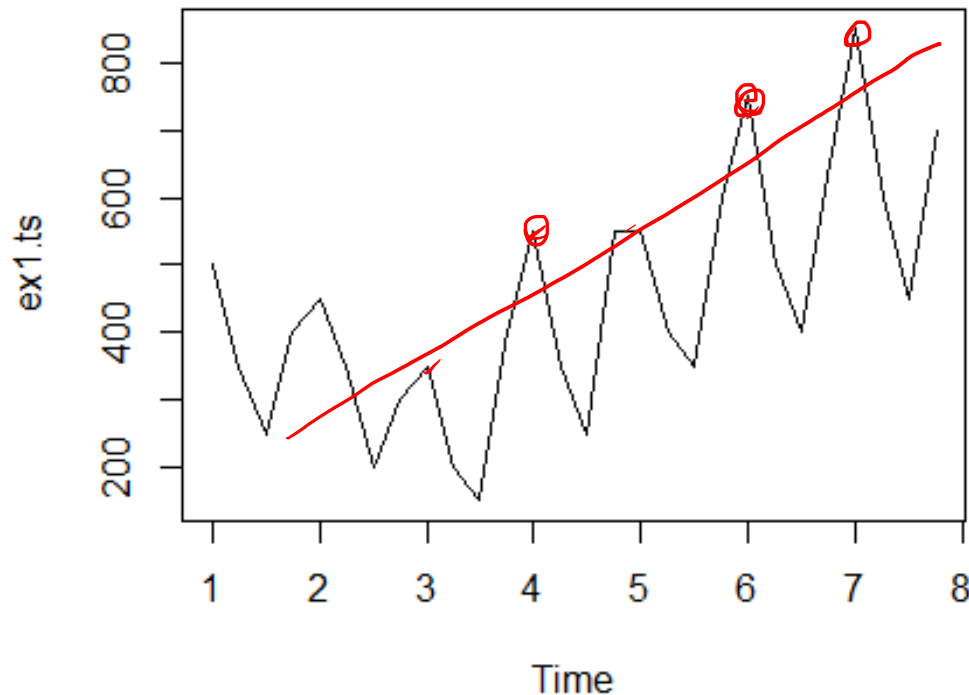
- Considere uma empresa em que as vendas foram agrupadas trimestralmente.

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	Ano	Trimestre	t	$Y_t$
1990	1	1	500	1994	1	17	550
	2	2	350		2	18	400
	3	3	250		3	19	350
	4	4	400		4	20	600
1991	1	5	450	1995	1	21	750
	2	6	350		2	22	500
	3	7	200		3	23	400
	4	8	300		4	24	650
1992	1	9	350	1996	1	25	850
	2	10	200		2	26	600
	3	11	150		3	27	450
	4	12	400		4	28	700
1993	1	13	550				
	2	14	350				
	3	15	250				
	4	16	550				

# 1. Modelos Ingênuos

---

- Considere uma empresa em que as vendas foram agrupadas trimestralmente.



# 1. Modelos Ingênuos

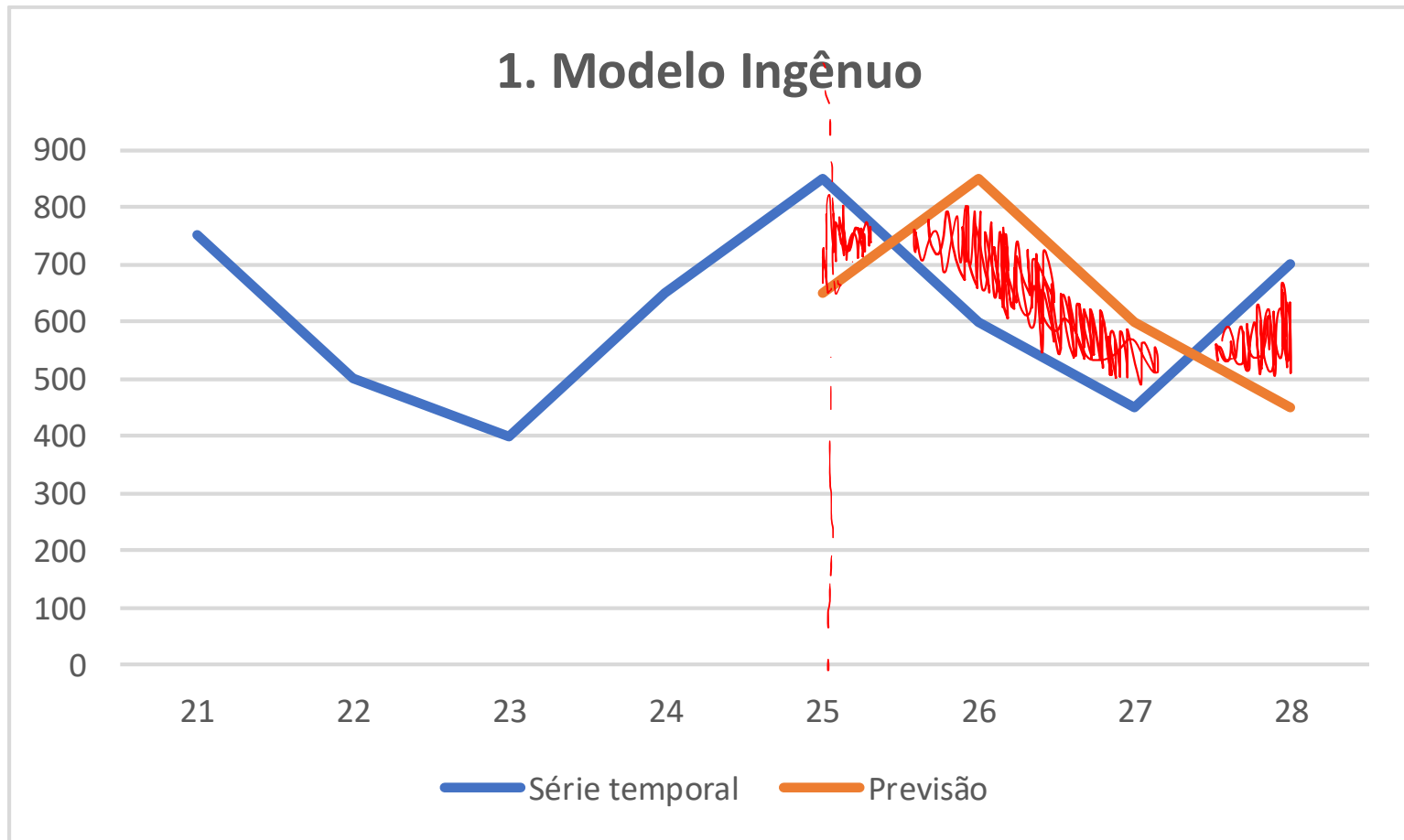
- Aplique o modelo ingênuo  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t$ , para o período de testes iniciando em  $t = 25$ .

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$
1995	1	21	750						
	2	22	500						
	3	23	400						
	4	24	650						
1996	1	25	850	650	+ 200	200	40.000	23,5%	23,5%
	2	26	600	850	-250	250	62.500	41,7%	-41,7%
	3	27	450	600	-150	150	22.500	33,3%	-33,3%
	4	28	700	450	+ 250	250	62.500	35,7%	35,7%
				<b>700</b>					
						<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
						213	46.875	33,6%	-3,9%



# 1. Modelos Ingênuos

➤  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t$



# 1. Modelos Ingênuos

- Tendo em vista que os dados apresentam uma tendência de crescimento, o modelo ingênuo pode ser adaptado para contemplar a componente de tendência:  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1})$ .
- $\hat{Y}_2 = Y_1 + (Y_1 - Y_0)$

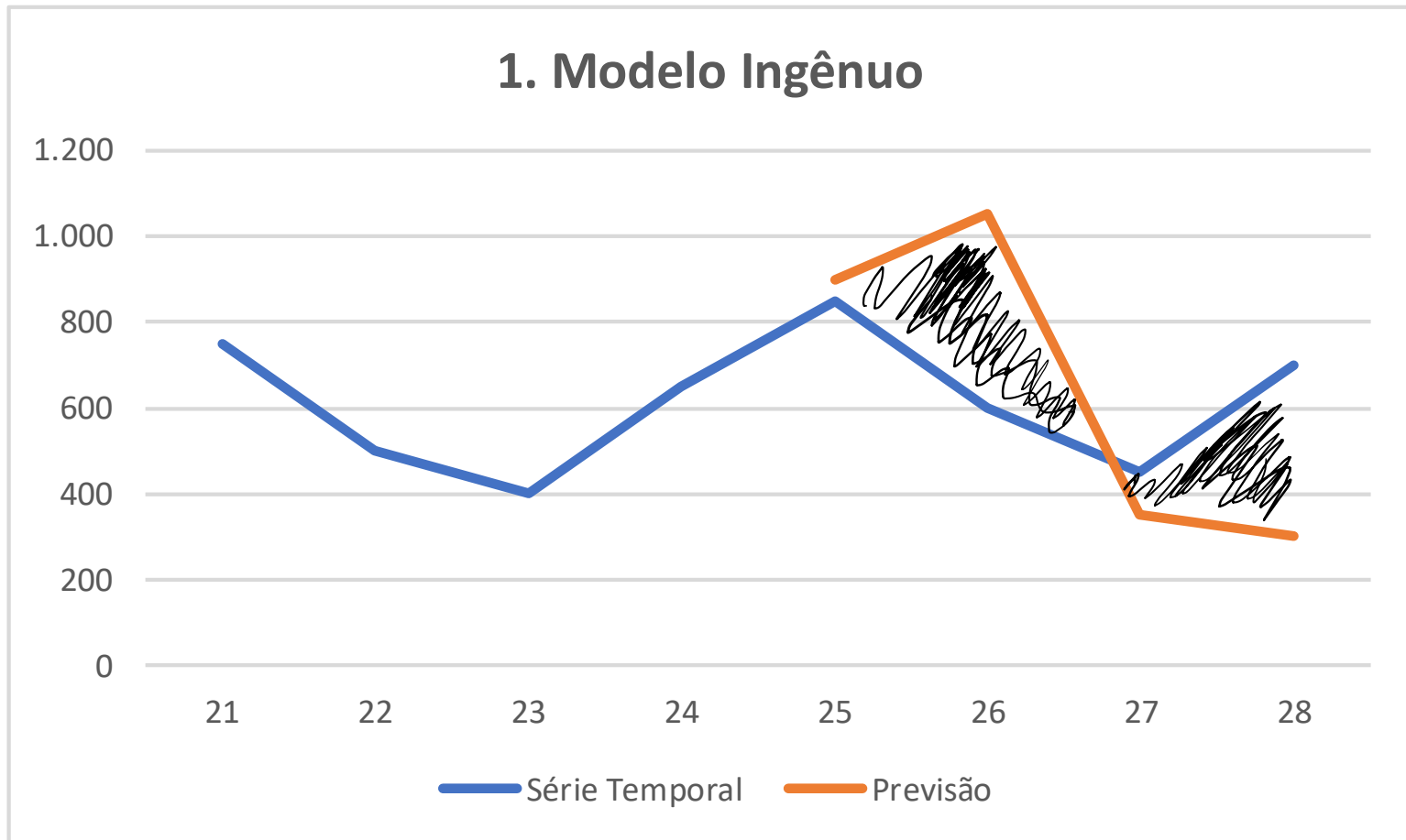
Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$
1995	1	21	750						
	2	22	500						
	3	23	400						
	4	24	650						
1996	1	25	850	900	-50	50	2.500	5,9%	-5,9%
	2	26	600	1.050	-450	450	202.500	75,0%	-75,0%
	3	27	450	350	100	100	10.000	22,2%	22,2%
	4	28	700	300	400	400	160.000	57,1%	57,1%

**950**

MAD	MSE	MAPE	MPE
250	93.750	40,1%	-0,4%

# 1. Modelos Ingênuos

➤  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1})$



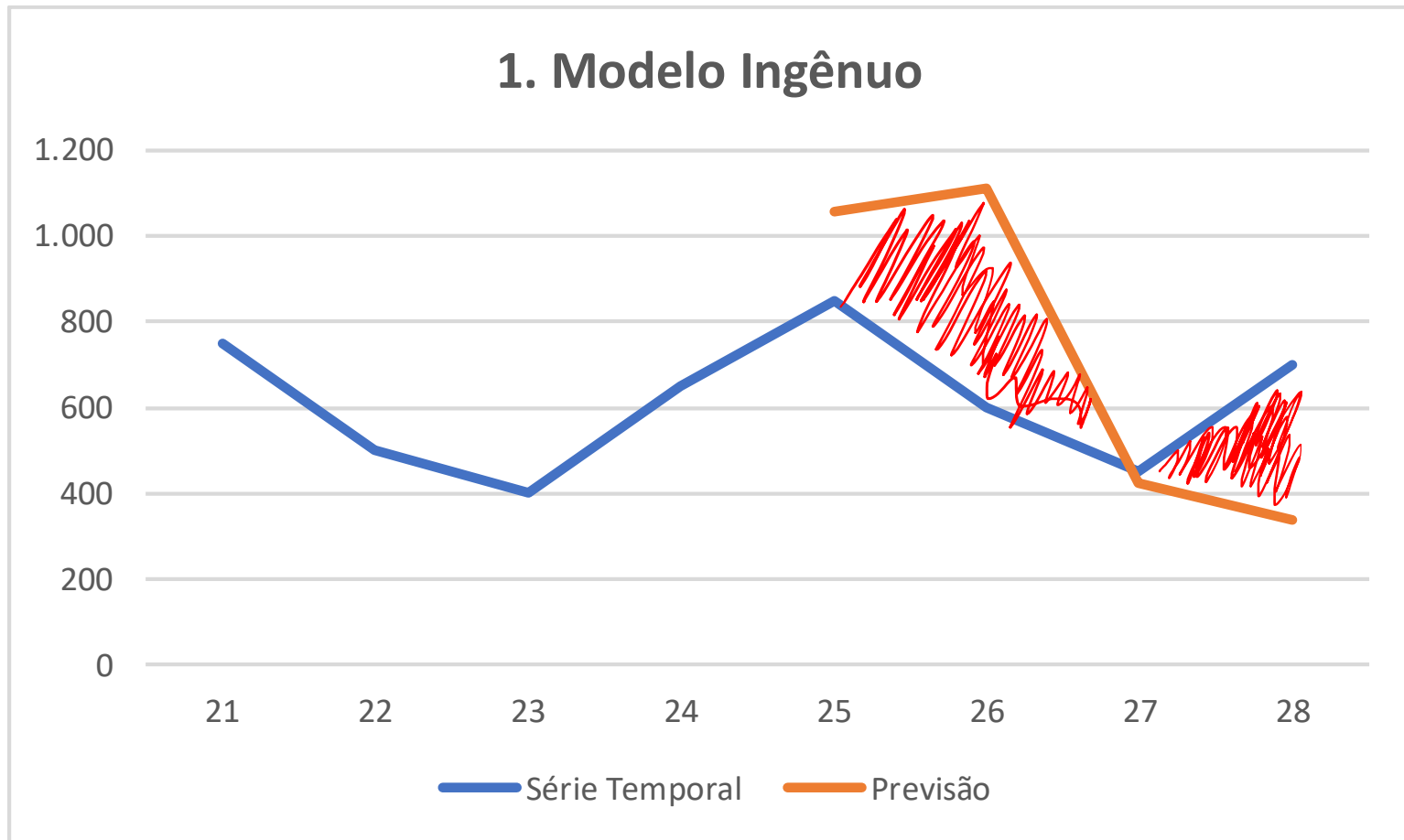
# 1. Modelos Ingênuos

- Às vezes, a taxa de variação poderá ser mais apropriada que o valor absoluto da mudança, tendo como modelo de previsão:  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t \left( \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right)$ .

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$			
1995	1	21	750									
	2	22	500									
	3	23	400									
	4	24	650									
1996	1	25	850	1.056	-206	206	42.539	24,3%	-24,3%			
	2	26	600	1.112	-512	512	261.672	85,3%	-85,3%			
	3	27	450	424	26	26	701	5,9%	5,9%			
	4	28	700	338	363	363	131.406	51,8%	51,8%			
				<b>1.089</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
									277	109.079	41,8%	-13,0%

# 1. Modelos Ingênuos

➤  $\hat{Y}_{t+1} = Y_t \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$



# 1. Modelos Ingênuos

- Como existe variação sazonal, então uma forma possível de prever é:  $\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3}$ .

~~$\hat{Y}_t = Y_0$~~

$t+1-4 = t-3$

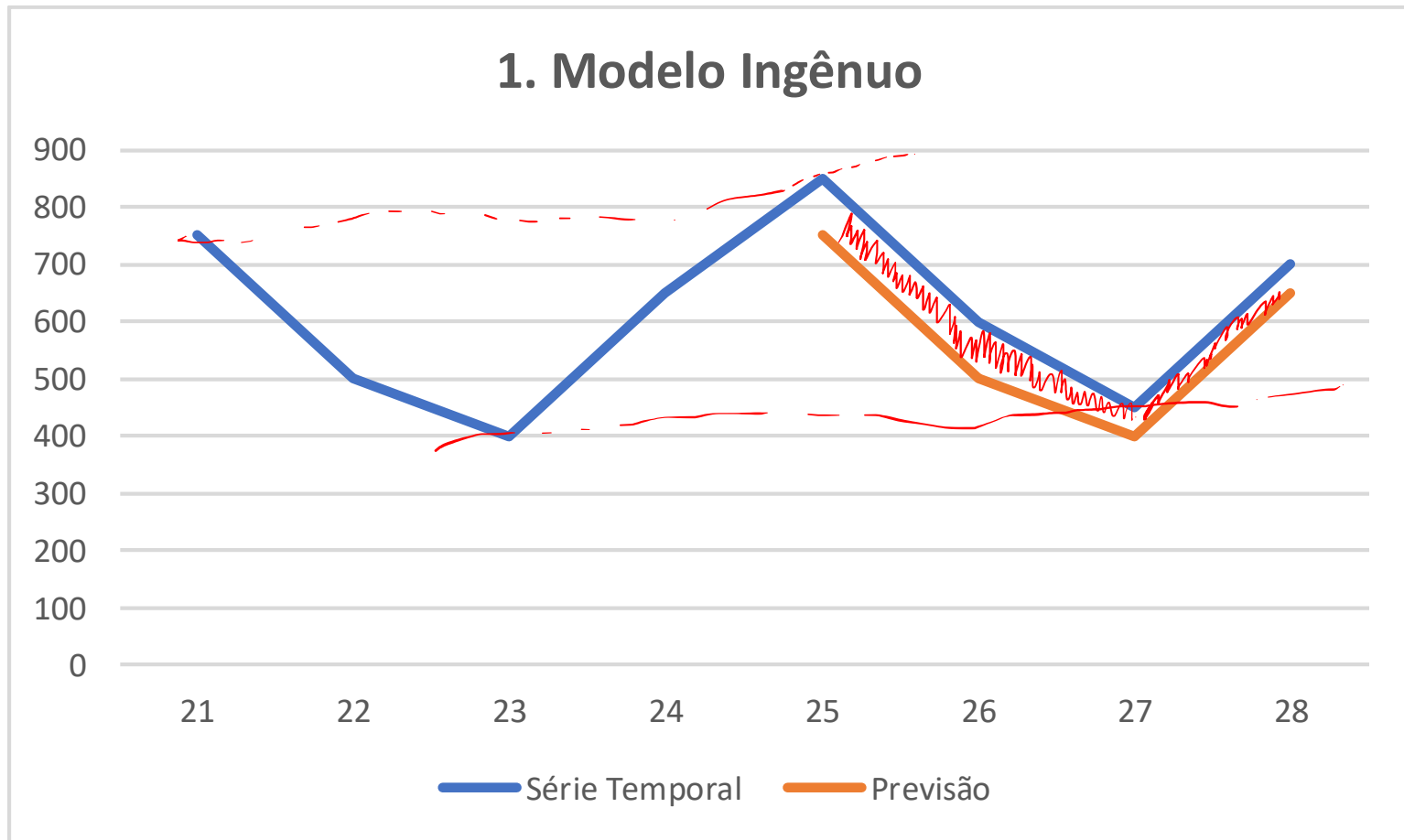
Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$
1995	1	21	750						
	2	22	500						
	3	23	400						
	4	24	650						
1996	1	25	850	750	100	100	10.000	11,8%	11,8%
	2	26	600	500	100	100	10.000	16,7%	16,7%
	3	27	450	400	50	50	2.500	11,1%	11,1%
	4	28	700	650	50	50	2.500	7,1%	7,1%

**850**

MAD	MSE	MAPE	MPE
75	6.250	11,7%	11,7%

# 1. Modelos Ingênuos

➤  $\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3}$



# 1. Modelos Ingênuos

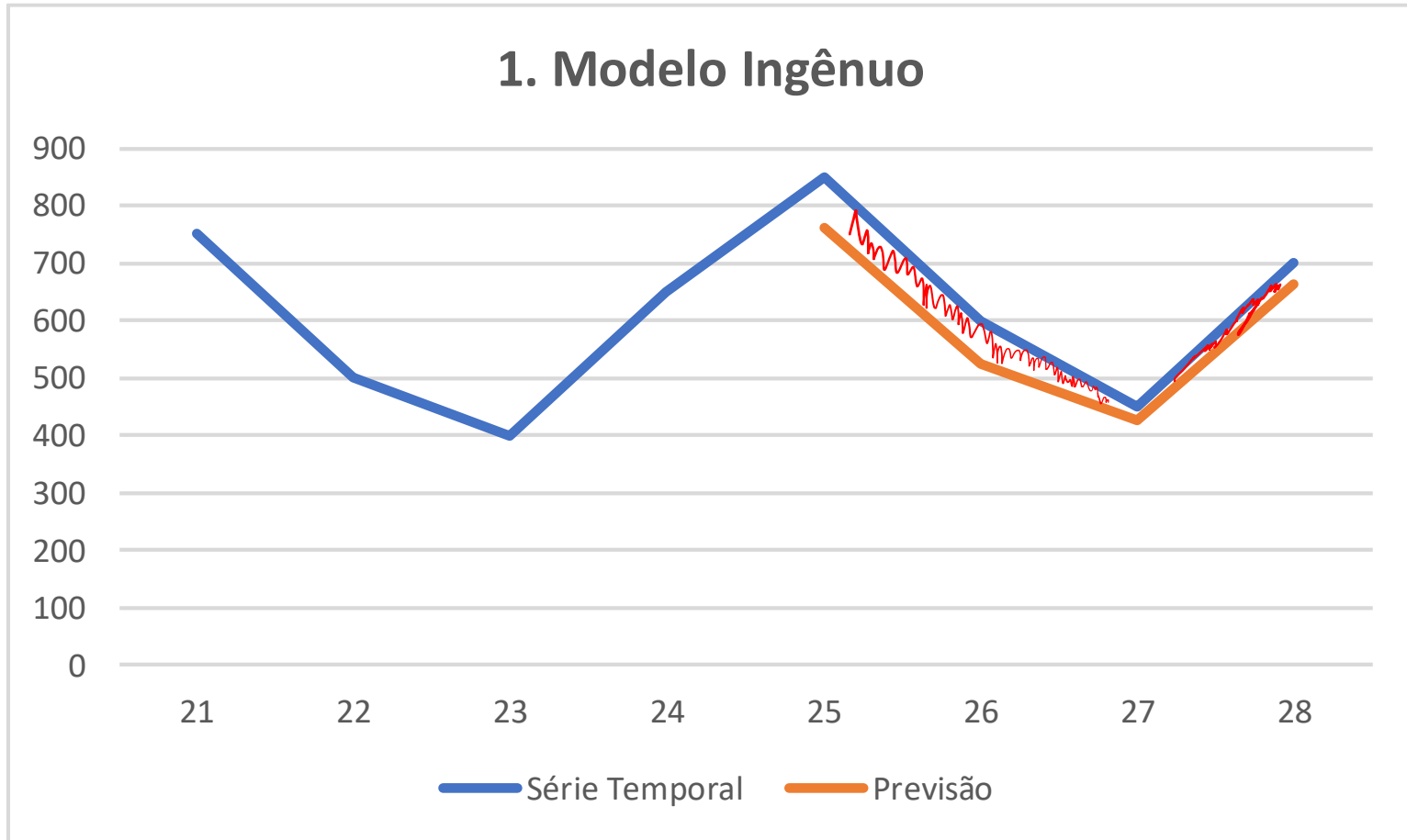
- Adicionalmente, a tendência poderá ser considerada:  $\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3} + \frac{(Y_t - Y_{t-1}) + \dots + (Y_{t-3} - Y_{t-4})}{4}$ .

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$	
1995	1	21	750							
	2	22	500							
	3	23	400							
	4	24	650							
1996	1	25	850	763	88	88	7.656	10,3%	10,3%	
	2	26	600	525	75	75	5.625	12,5%	12,5%	
	3	27	450	425	25	25	625	5,6%	5,6%	
	4	28	700	663	38	38	1.406	5,4%	5,4%	
				<b>863</b>			<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
							56	3.828	<b>8,4%</b>	8,4%



# 1. Modelos Ingênuos

➤ 
$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3} + \frac{(Y_t - Y_{t-1}) + \dots + (Y_{t-3} - Y_{t-4})}{4}$$



## 2. Média Simples

---

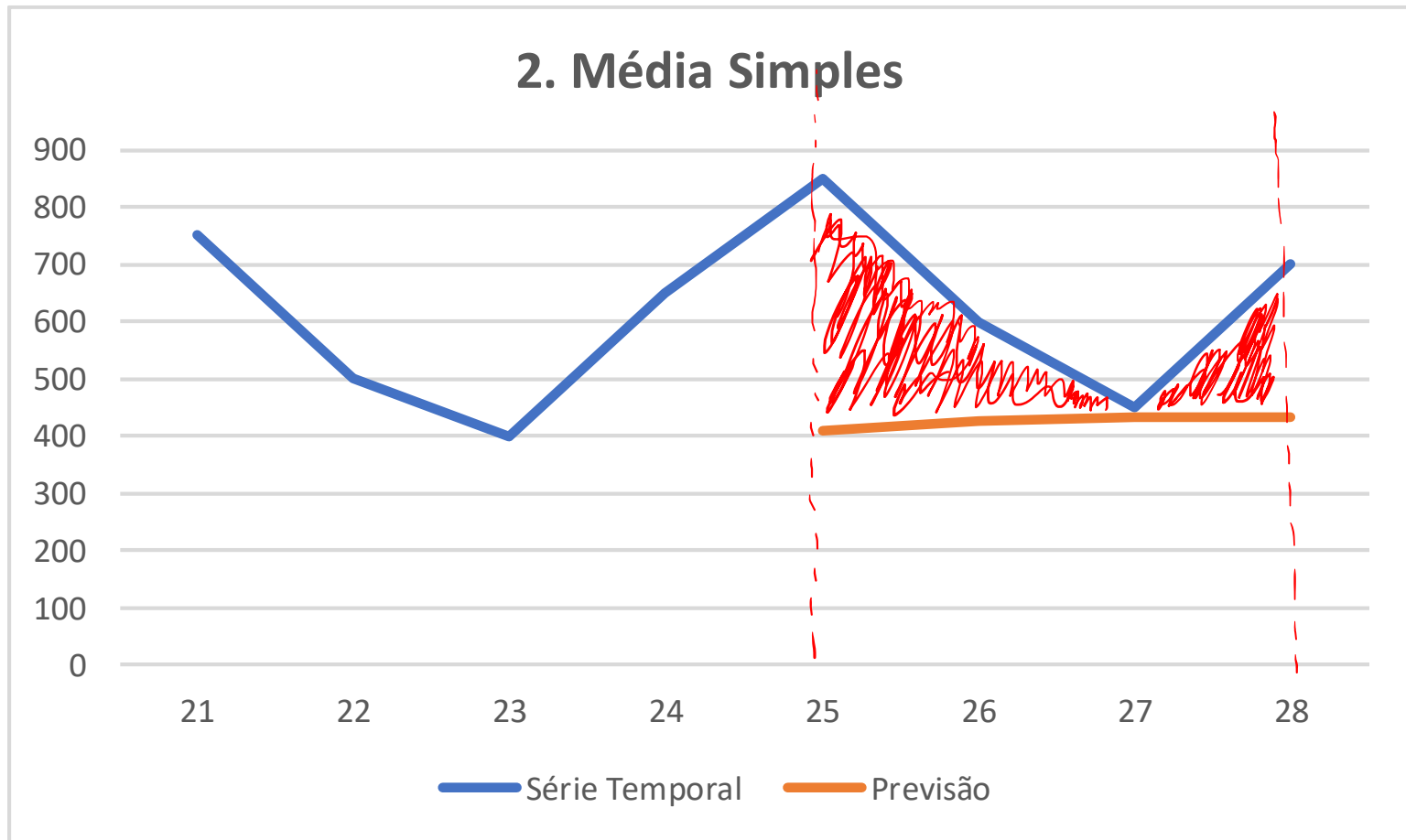
- Os dados históricos são suavizados por meio de uma curva média simples, e as flutuações observadas podem ser consideradas como variações aleatórias. Os  $t$  períodos iniciais são considerados com períodos de inicialização. A previsão é dada por:  $\hat{Y}_{t+1} = \frac{\sum_{s=1}^t Y_s}{t}$
-

## 2. Média Simples

---

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$			
1995	1	21	750									
	2	22	500									
	3	23	400									
	4	24	650									
1996	1	25	850	408,3	442	442	195.069	52,0%	52,0%			
	2	26	600	426,0	174	174	30.276	29,0%	29,0%			
	3	27	450	432,7	17	17	300	3,8%	3,8%			
	4	28	700	433,3	267	267	71.111	38,1%	38,1%			
				<b>442,9</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
									225	74.189	30,7%	30,7%

# 2. Média Simples



### 3. Média Móvel

---

- A técnica da média simples utiliza todo o histórico para prever. Contudo, muitas vezes a informação mais relevante para prever é a mais recente.
  - A técnica da média móvel considera os últimos  $n$  dados como relevantes para previsão. Assim:  $\hat{Y}_{t+1} = \underline{M}_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + \dots + Y_{t-n+1}}{n}$
  - O mesmo peso é dado a cada registro da série histórica.
-

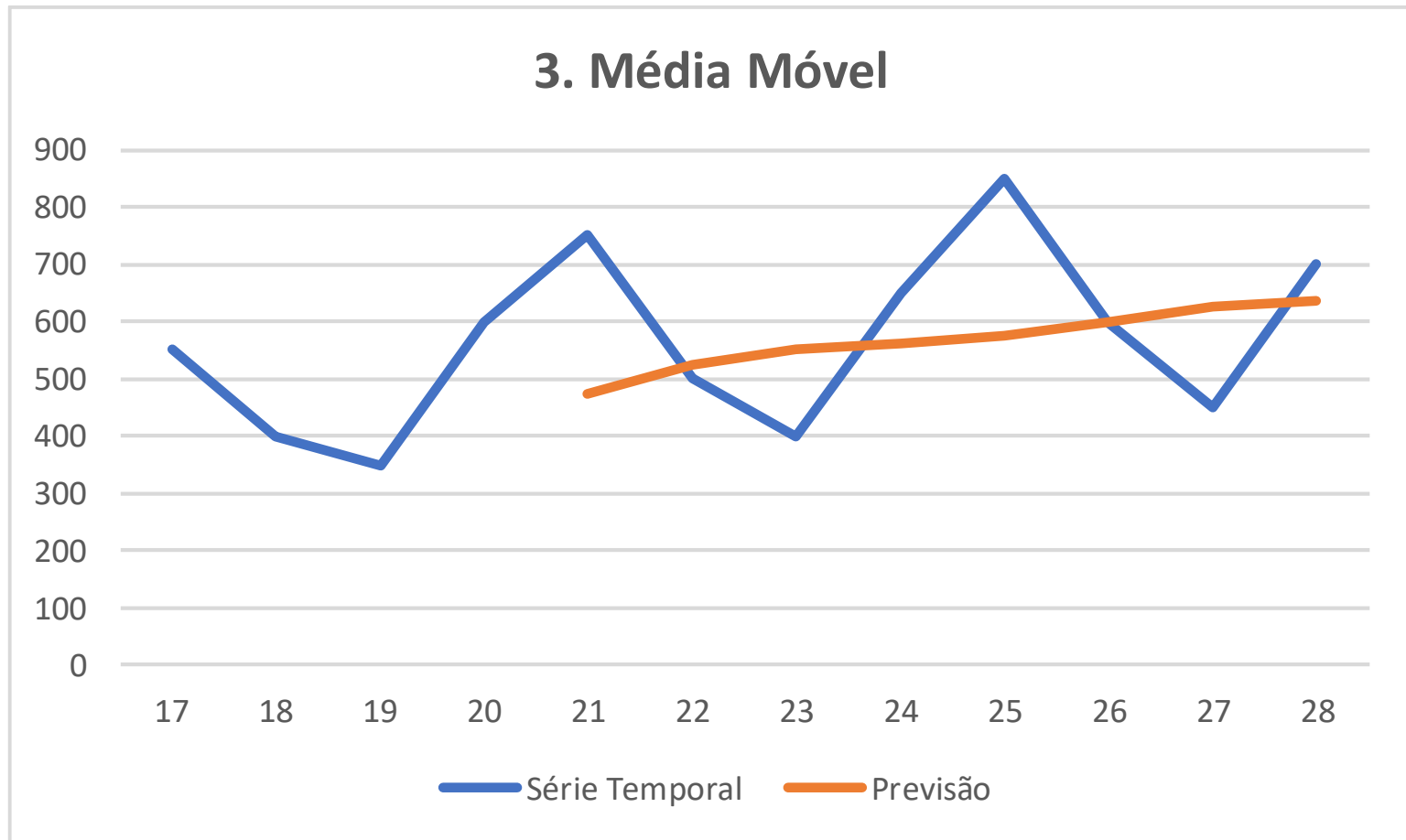
# 3. Média Móvel

➤ Média móvel  $n=4$ ;

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$M_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$	
1994	1	17	550								
	2	18	400								
	3	19	350								
	4	20	600	475,0							
1995	1	21	750	525,0	475,0	275,0	275,0	75.625,0	36,7%	36,7%	
	2	22	500	550,0	525,0	-25,0	25,0	625,0	5,0%	-5,0%	
	3	23	400	562,5	550,0	-150,0	150,0	22.500,0	37,5%	-37,5%	
	4	24	650	575,0	562,5	87,5	87,5	7.656,3	13,5%	13,5%	
1996	1	25	850	600,0	575,0	275,0	275,0	75.625,0	32,4%	32,4%	
	2	26	600	625,0	600,0	0,0	0,0	0,0	0,0%	0,0%	
	3	27	450	637,5	625,0	-175,0	175,0	30.625,0	38,9%	-38,9%	
	4	28	700	650,0	637,5	62,5	62,5	3.906,3	8,9%	8,9%	
					<b>650,0</b>			<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
								131	27.070	21,6%	1,3%

# 3. Média Móvel

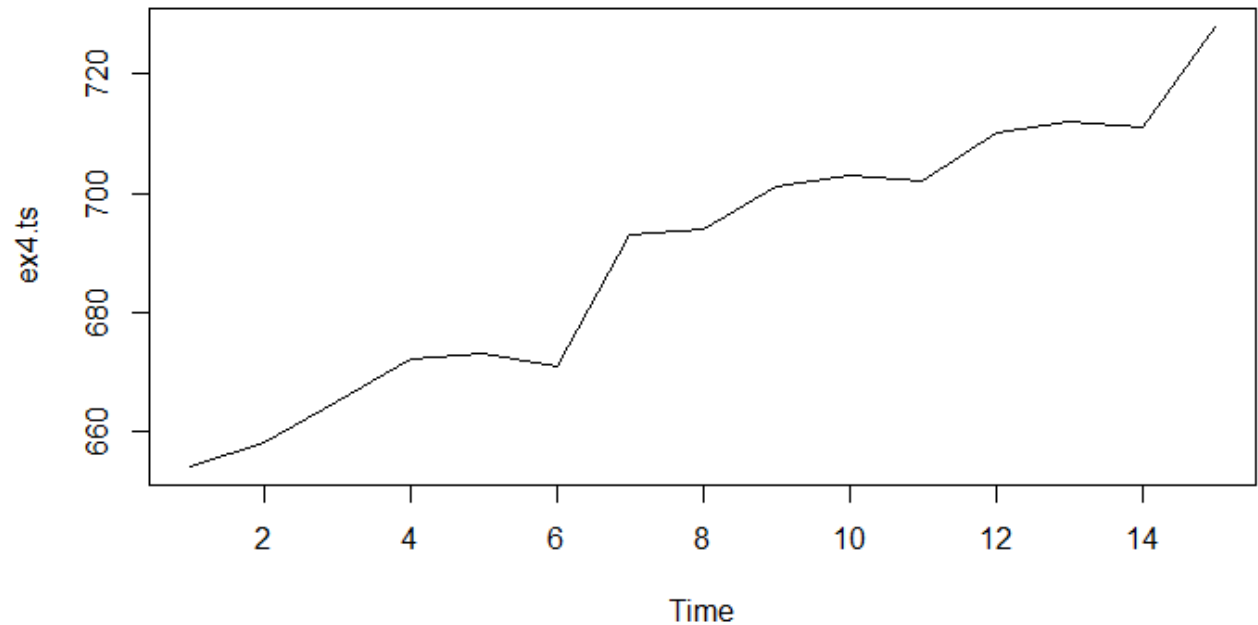
➤ Média móvel  $n=4$ ;



# 3. Média Móvel

## ➤ Exemplo 2 – Série com tendência

t	$Y_t$
1	654
2	658
3	665
4	672
5	673
6	671
7	693
8	694
9	701
10	703
11	702
12	710
13	712
14	711
15	728





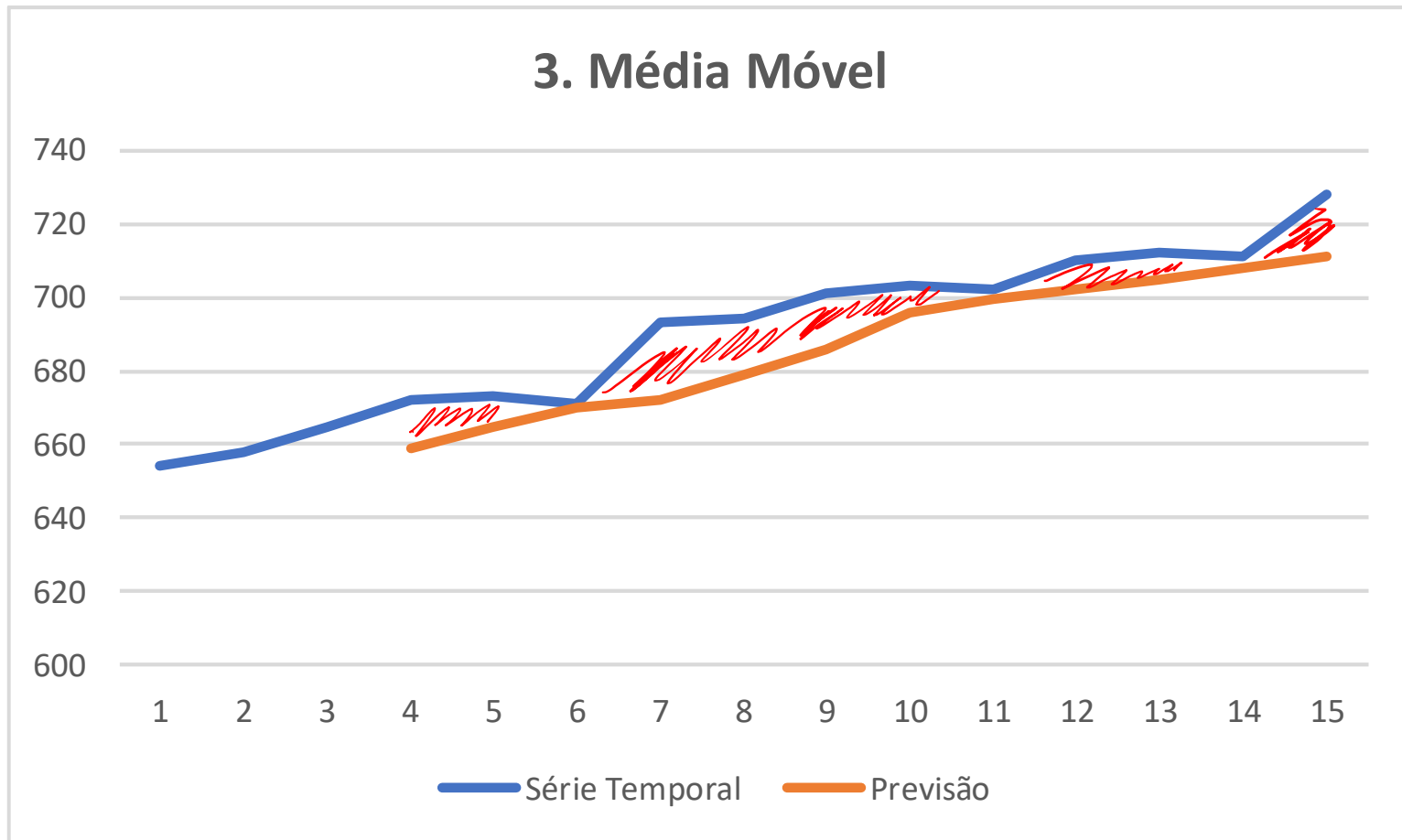
# 3. Média Móvel

➤ Média móvel  $n=3$ ;

t	$Y_t$	$M_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$			
1	654										
2	658										
3	665	659,0									
4	672	665,0	659,0	13,0	13,0	169,0	1,9%	1,9%			
5	673	670,0	665,0	8,0	8,0	64,0	1,2%	1,2%			
6	671	672,0	670,0	1,0	1,0	1,0	0,1%	0,1%			
7	693	679,0	672,0	21,0	21,0	441,0	3,0%	3,0%			
8	694	686,0	679,0	15,0	15,0	225,0	2,2%	2,2%			
9	701	696,0	686,0	15,0	15,0	225,0	2,1%	2,1%			
10	703	699,3	696,0	7,0	7,0	49,0	1,0%	1,0%			
11	702	702,0	699,3	2,7	2,7	7,1	0,4%	0,4%			
12	710	705,0	702,0	8,0	8,0	64,0	1,1%	1,1%			
13	712	708,0	705,0	7,0	7,0	49,0	1,0%	1,0%			
14	711	711,0	708,0	3,0	3,0	9,0	0,4%	0,4%			
15	728	717,0	711,0	17,0	17,0	289,0	2,3%	2,3%			
			<b>717,0</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
								9,8	132,7	1,4%	1,4%

# 3. Média Móvel

➤ Média móvel  $n=3$ ;



## 4. Média Móvel Dupla

---

- Se os dados apresentarem tendência, então a média móvel dupla poderá gerar uma maior precisão na previsão.
- A previsão será dada por uma combinação da média móvel dos valores observados com a média móvel das médias.

- $$M_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + \dots + Y_{t-n+1}}{n}$$
 ✓

- $$M'_t = \frac{M_t + M_{t-1} + M_{t-2} + \dots + M_{t-n+1}}{n}$$
 ✓

- $$a_t = 2M_t - M'_t; \quad b_t = \frac{2}{n-1}(M_t - M'_t)$$

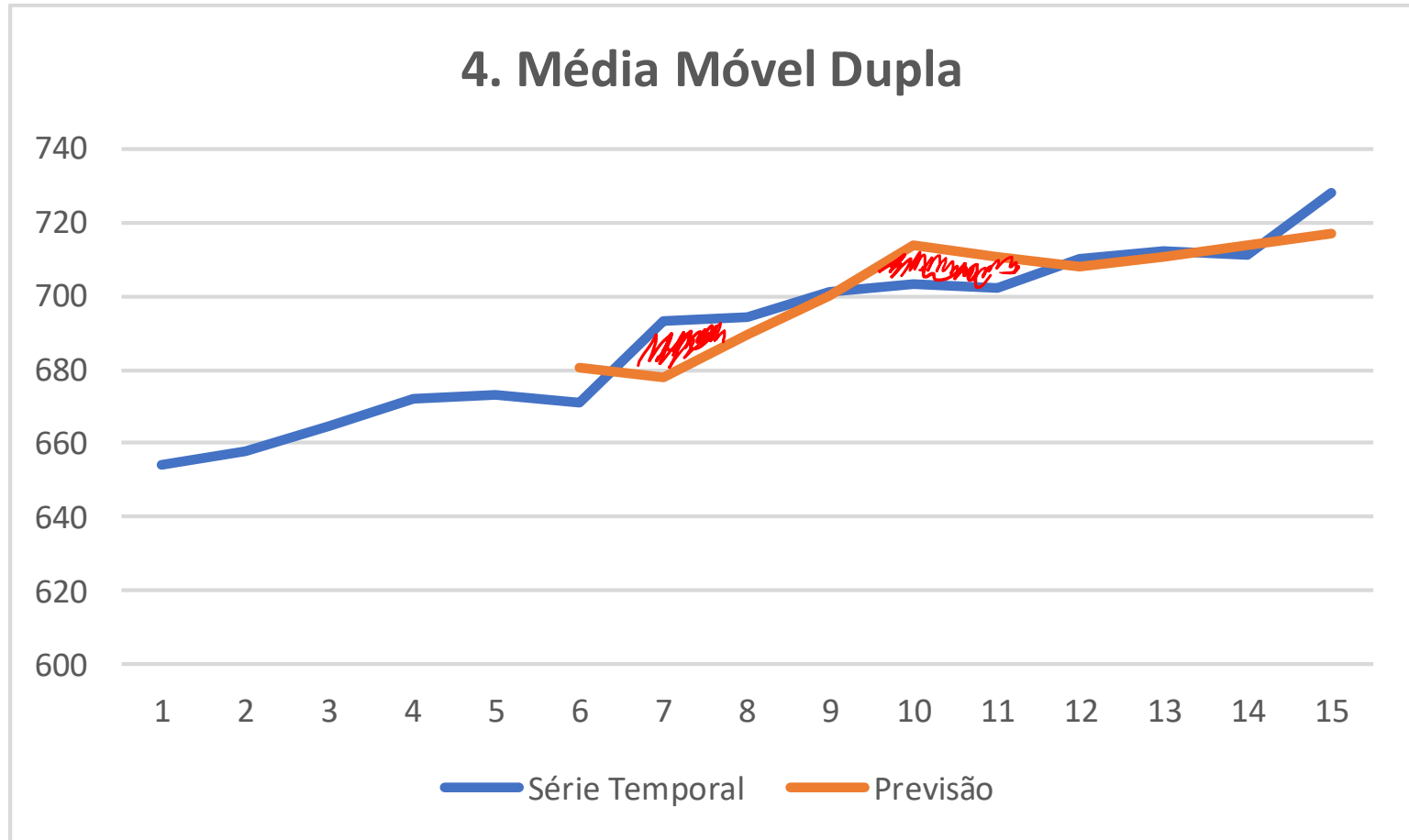
- $$\hat{Y}_{t+p} = a_t + b_t p$$
 ✓

---

# 4. Média Móvel Dupla

t	$Y_t$	$M_t$	$M'_t$	a	b	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$	
1	654											
2	658											
3	665	659,0										
4	672	665,0										
5	673	670,0	664,7	675,3	5,3							
6	671	672,0	669,0	675,0	3,0	680,7	-9,7	9,7	93,4	1,4%	-1,4%	
7	693	679,0	673,7	684,3	5,3	678,0	15,0	15,0	225,0	2,2%	2,2%	
8	694	686,0	679,0	693,0	7,0	689,7	4,3	4,3	18,8	0,6%	0,6%	
9	701	696,0	687,0	705,0	9,0	700,0	1,0	1,0	1,0	0,1%	0,1%	
10	703	699,3	693,8	704,9	5,6	714,0	-11,0	11,0	121,0	1,6%	-1,6%	
11	702	702,0	699,1	704,9	2,9	710,4	-8,4	8,4	71,3	1,2%	-1,2%	
12	710	705,0	702,1	707,9	2,9	707,8	2,2	2,2	4,9	0,3%	0,3%	
13	712	708,0	705,0	711,0	3,0	710,8	1,2	1,2	1,5	0,2%	0,2%	
14	711	711,0	708,0	714,0	3,0	714,0	-3,0	3,0	9,0	0,4%	-0,4%	
15	728	717,0	712,0	722,0	5,0	717,0	11,0	11,0	121,0	1,5%	1,5%	
						<b>727,0</b>	<b>MAD</b>		<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>		<b>MPE</b>
							6,7	66,7	1,0%	0,0%		

# 4. Média Móvel Dupla



## 5. Suavizamento Exponencial

---

- É um procedimento que continuamente revisa as previsões feitas, à luz de dados mais recentes.
  - A previsão (para o instante  $t+1$ ) consiste em uma média ponderada do dado observado no instante  $t$  e da previsão feita para o instante  $t$ .
  - $\hat{Y}_{t+1} = S_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t \quad (0 < \alpha < 1)$
  - $\alpha$  = constante de suavizamento
  - $S_t$  = valor suavizado no instante  $t$
-

# 5. Suavizamiento Exponencial

---

$$S_2 = \alpha Y_2 + (1 - \alpha) S_1$$

$$S_3 = \alpha Y_3 + (1 - \alpha) S_2$$

$$S_4 = \alpha Y_4 + (1 - \alpha) S_3$$

$$S_3 = \alpha Y_3 + (1 - \alpha)[\alpha Y_2 + (1 - \alpha)S_1]$$

$$S_3 = \alpha Y_3 + \alpha Y_2 + (1 - \alpha)S_1 - \alpha^2 Y_2 - \alpha(1 - \alpha)S_1$$

$$S_3 = \alpha Y_3 + \alpha Y_2 + (1 - \alpha)S_1 - \alpha^2 Y_2 - \alpha S_1 + \alpha^2 S_1$$

$$S_3 = \alpha Y_3 + \alpha Y_2 + S_1 - \alpha S_1 - \alpha^2 Y_2 - \alpha S_1 + \alpha^2 S_1$$

$$S_3 = \underline{S_1} + \alpha(\underline{Y_3} + \underline{Y_2} - 2S_1) + \alpha^2(\underline{S_1} - Y_2)$$

$$S_4 = \alpha Y_4 + (1 - \alpha)[S_1 + \alpha(Y_3 + Y_2 - 2S_1) + \alpha^2(S_1 - Y_2)]$$

$$S_4 = f(\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$$

$$S_5 = f(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$$

$$S_7 = f(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6)$$

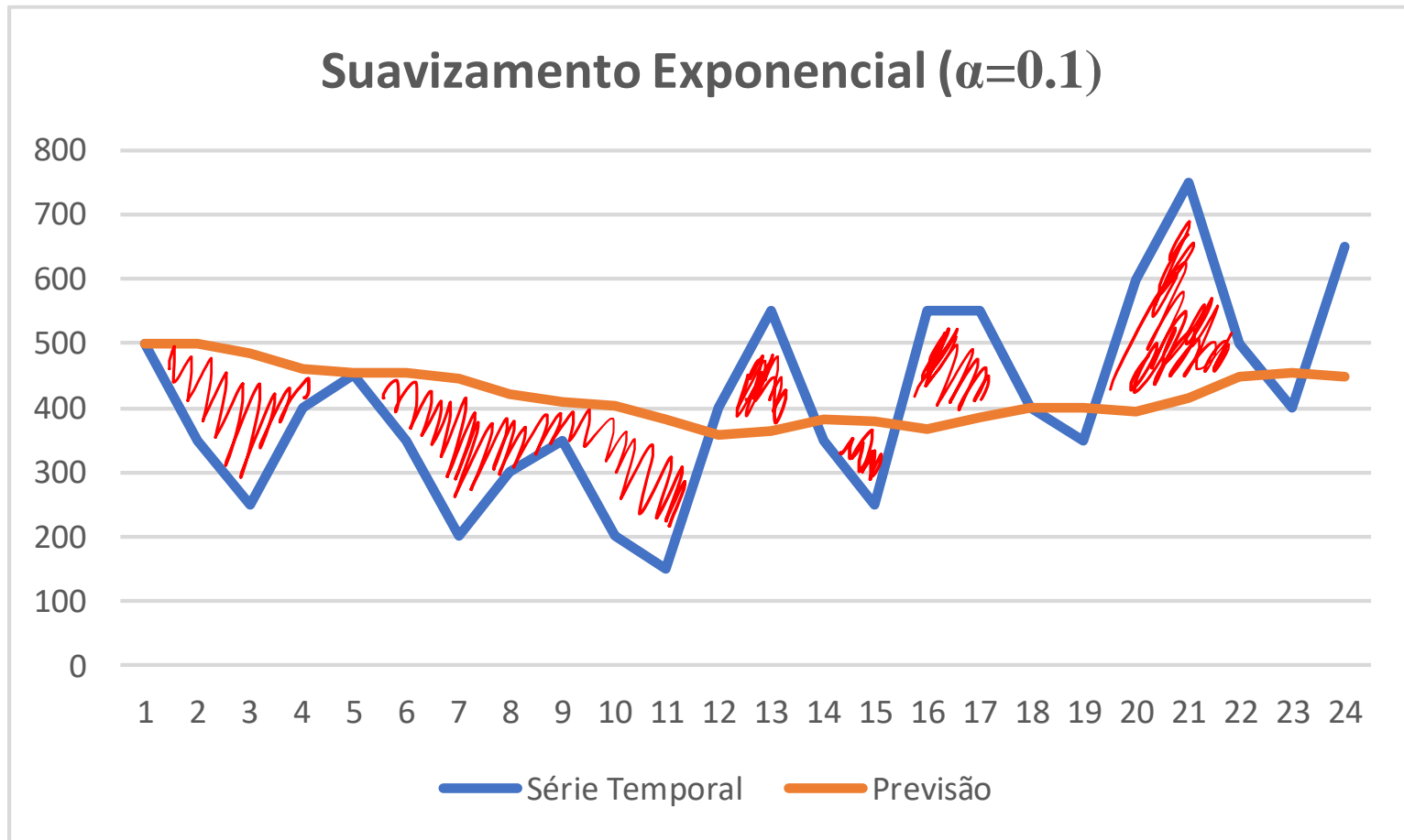
---

# 5. Suavizamento Exponencial

Ano	Trimestre	t	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$e_t$	$ e_t $	$e_t^2$	$ e_t /Y_t$	$e_t/Y_t$			
1990	1	1	500	500,0	0,0	0,0	0,0	0,0%	0,0%			
	2	2	350	500,0	-150,0	150,0	22.500,0	42,9%	-42,9%			
	3	3	250	485,0	-235,0	235,0	55.225,0	94,0%	-94,0%			
	4	4	400	461,5	-61,5	61,5	3.782,3	15,4%	-15,4%			
1991	1	5	450	455,4	-5,4	5,4	28,6	1,2%	-1,2%			
	2	6	350	454,8	-104,8	104,8	10.986,2	29,9%	-29,9%			
	3	7	200	444,3	-244,3	244,3	59.698,9	122,2%	-122,2%			
	4	8	300	419,9	-119,9	119,9	14.376,0	40,0%	-40,0%			
1992	1	9	350	407,9	-57,9	57,9	3.353,6	16,5%	-16,5%			
	2	10	200	402,1	-202,1	202,1	40.852,1	101,1%	-101,1%			
	3	11	150	381,9	-231,9	231,9	53.781,0	154,6%	-154,6%			
	4	12	400	358,7	41,3	41,3	1.704,3	10,3%	10,3%			
1993	1	13	550	362,8	187,2	187,2	35.027,1	34,0%	34,0%			
	2	14	350	381,6	-31,6	31,6	996,1	9,0%	-9,0%			
	3	15	250	378,4	-128,4	128,4	16.487,7	51,4%	-51,4%			
	4	16	550	365,6	184,4	184,4	34.016,7	33,5%	33,5%			
1994	1	17	550	384,0	166,0	166,0	27.553,5	30,2%	30,2%			
	2	18	400	400,6	-0,6	0,6	0,4	0,2%	-0,2%			
	3	19	350	400,5	-50,5	50,5	2.554,9	14,4%	-14,4%			
	4	20	600	395,5	204,5	204,5	41.823,7	34,1%	34,1%			
1995	1	21	750	415,9	334,1	334,1	111.594,5	44,5%	44,5%			
	2	22	500	449,3	50,7	50,7	2.565,6	10,1%	10,1%			
	3	23	400	454,4	-54,4	54,4	2.960,8	13,6%	-13,6%			
	4	24	650	449,0	201,0	201,0	40.412,3	30,9%	30,9%			
				<b>469,1</b>					<b>MAD</b>	<b>MSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>MPE</b>
					127,0	24.261,7	38,9%	-19,9%				

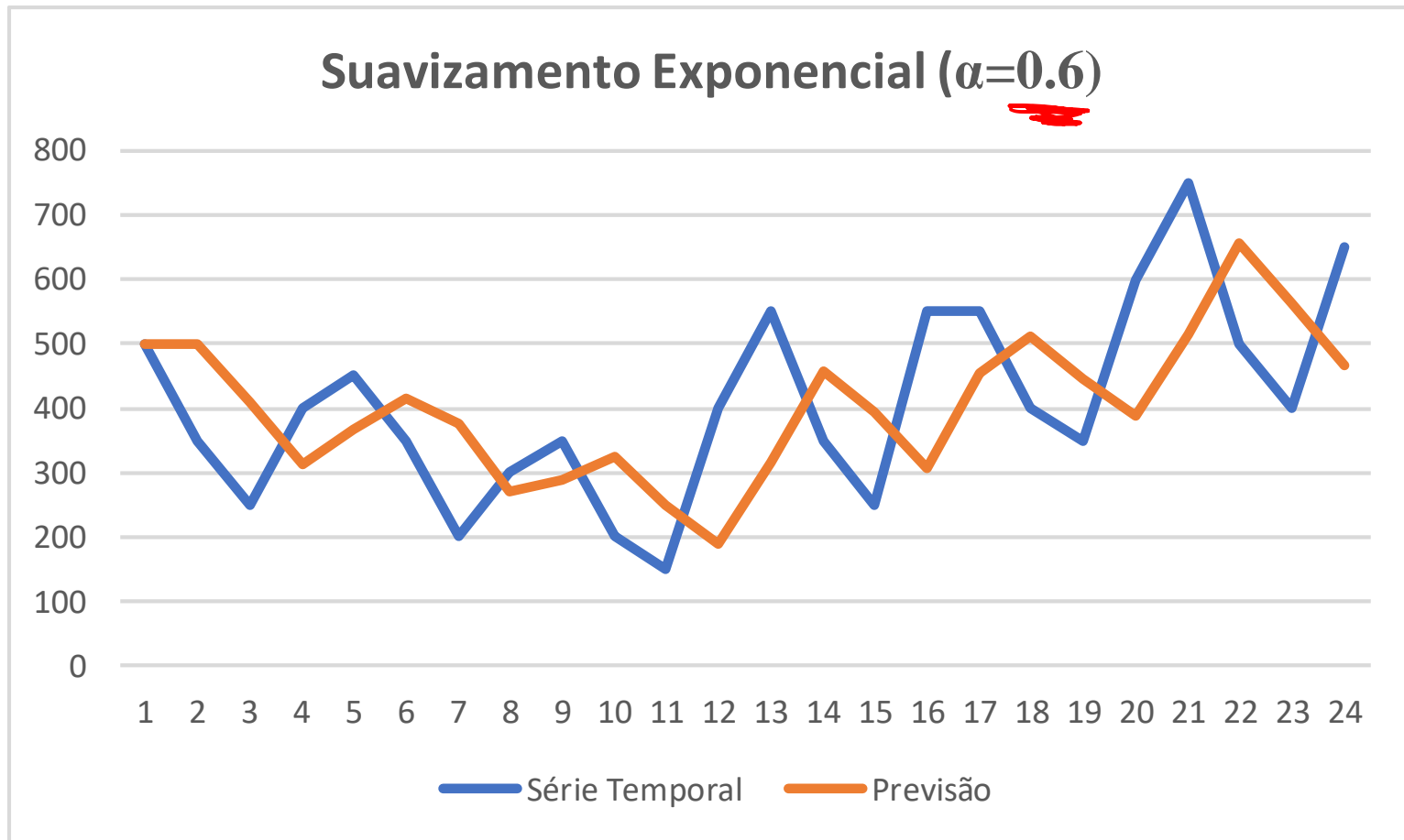


# 5. Suavizamento Exponencial



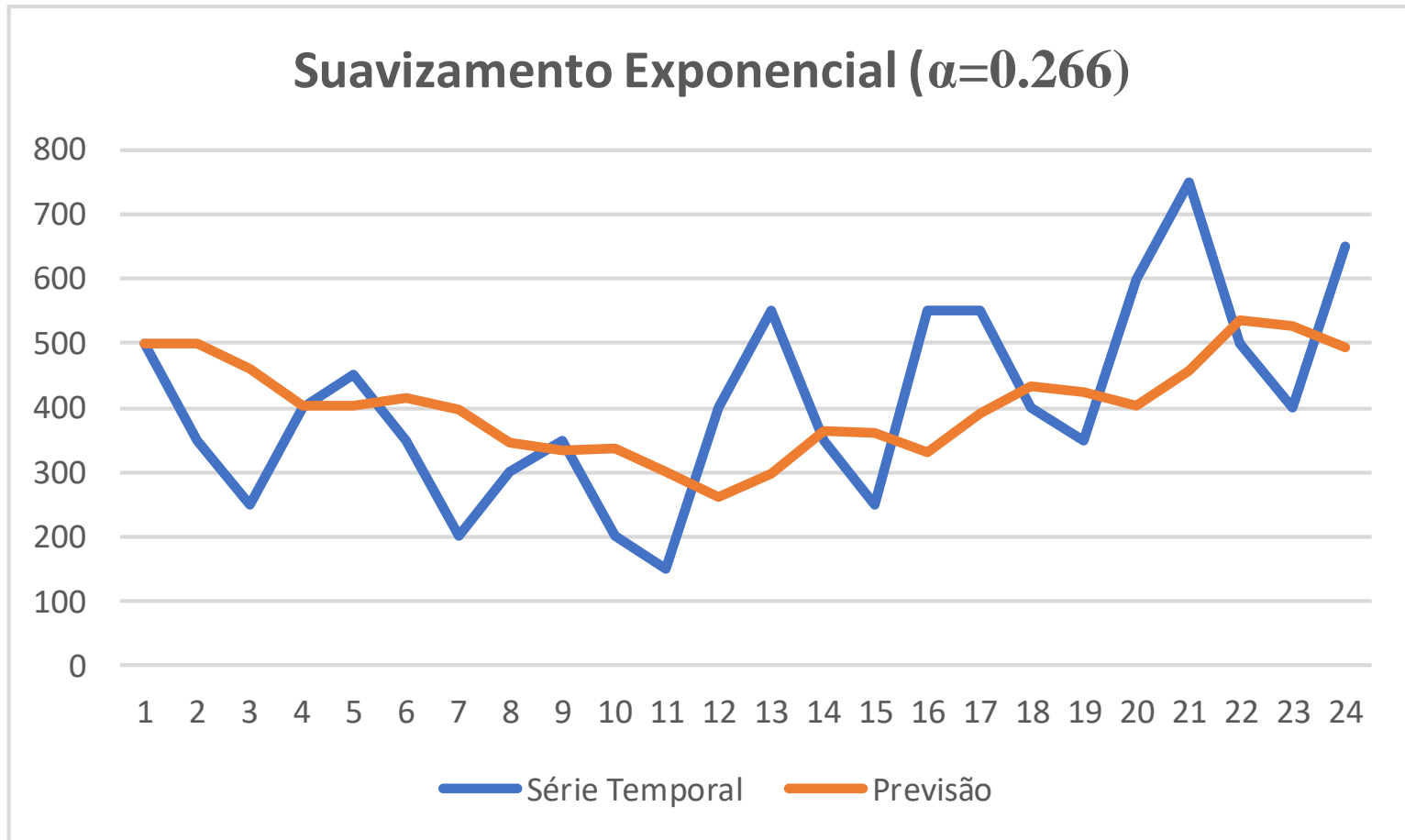
MAD	MSE	MAPE	MPE
127,0	24.261,7	38,9%	-19,9%

# 5. Suavizamento Exponencial



MAD	MSE	MAPE	MPE
134,5	22.248,4	36,5%	-9,9%

# 5. Suavizamento Exponencial



MAD	MSE	MAPE	MPE
118,1	20.771,5	33,6%	-11,9%

# Exercício

- Para a série temporal abaixo, aplique os seguintes métodos de previsão: modelo ingênuo, média simples, média móvel ( $n=3$ ,  $n=4$ ), suavizamento exponencial. Calcule os resíduos, e identifique se a método de previsão é válido.

t	$Y_t$	t	$Y_t$	t	$Y_t$	t	$Y_t$
1	32	10	28	19	27	28	39
2	39	11	23	20	36	29	37
3	32	12	30	21	25	30	24
4	26	13	28	22	35	31	33
5	21	14	32	23	39	32	39
6	31	15	25	24	37	33	20
7	34	16	28	25	32	34	27
8	31	17	35	26	31	35	20
9	20	18	24	27	37	36	39

