

**PME 3534 – Técnicas Experimentais e
Computacionais em Biomecânica em Sistemas
Vasculares**

Aula: 14/10/20

Prof. Jayme P. Ortiz

**Método dos Volumes Finitos: Acoplamento de Pressões e
Velocidades em Escoamentos Permanentes**

1. Introdução

A equação diferencial geral de transporte de uma propriedade extensiva ϕ estabelecida nas aulas anteriores é dada por:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi \vec{V}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_{\phi} \quad (I)$$

Considerando que a propriedade ϕ corresponde ao campo de velocidades u , v , w e admitindo um escoamento bidimensional, laminar e permanente, tem-se as equações da quantidade de movimento em x e y e a equação da continuidade escrita a seguir:

x-momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u$$

y-momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v$$

continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

(II)

Observa-se nessas equações que o gradiente pressão devido a sua importância em grande parte dos problemas de engenharia é destacado, já que influi diretamente no campo de velocidades das equações da quantidade de movimento.

A solução das equações (II) apresenta dois novos problemas:

- a) Os termos convectivos das equações da quantidade de movimento contém quantidades não lineares (por exemplo a derivada em x de ρu^2 ou de ρuv).
- b) As equações estão intrinsicamente acopladas porque cada componente de velocidade aparece na equação da quantidade de movimento e na equação da continuidade.
- c) O gradiente de pressão aparece em ambas as equações da quantidade de movimento.

De uma maneira geral a pressão pode ser obtida como:

$$p = p(\rho, T)$$

Escoamento incompressível $\rho = cte$.

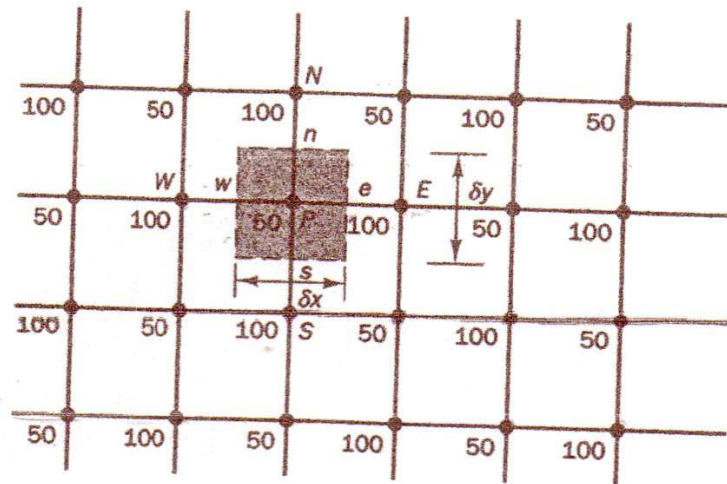
Se o campo correto de pressões é aplicado nas equações da quantidade de movimento o campo de velocidades resultante deve satisfazer a equação da continuidade.

Os problemas associados as não-linearidades nas equações e ao acoplamento dos campos de pressão e velocidade podem ser resolvidos, iterativamente, através de um algoritmo. Primeiro algoritmo proposto SIMPLE (Patankar e Spalding, 1972) Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations.

The SIMPLE algorithm was developed by Prof. [Brian Spalding](#) and his student [Suhaz Patankar](#) at [Imperial College](#), London in the early 1970s. Since then it has been extensively used by many researchers to solve different kinds of fluid flow and heat transfer problems(ref. Google)]

2. Staggered Grid

A figura abaixo representa uma malha bidimensional de um escoamento com os valores de pressões, expressões em Pascal, representados nos diversos nós da malha. A figura mostra também a representação de uma célula computacional do domínio. Se as pressões nas faces e e w forem obtidas por interpolação linear, pode-se escrever:



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{p_E + p_P}{2}\right) - \left(\frac{p_P + p_W}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x}$$

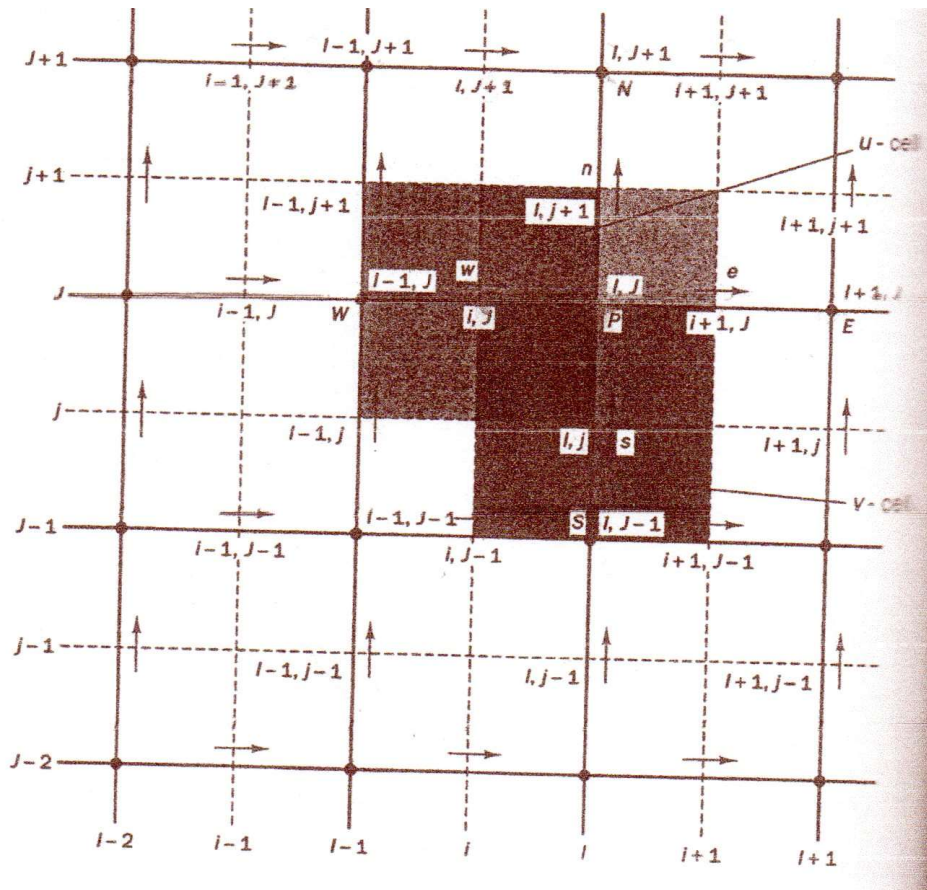
Similarmente:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_n - p_s}{\Delta y} = \frac{\left(\frac{p_N + p_P}{2}\right) - \left(\frac{p_P + p_S}{2}\right)}{\Delta y} = \frac{p_N - p_S}{2\Delta y}$$

Observa-se que a pressão no nó P não aparece após a interpolação e ao aplicar os valores numéricos da malha resulta gradiente nulo de velocidade, o que não é uma condição física real.

Portanto se as velocidades forem representadas nos mesmos nós, a influência das pressões não estará propriamente representada nas equações discretizadas da quantidade de movimento.

Solução – aplicação do método *staggered grid*: A idéia é avaliar as variáveis escalares (pressão, densidade, temperatura etc) nos pontos nodais ordinários, mas calcular as componentes de velocidade centradas nas faces das células. Neste caso, o arranjo no escoamento bidimensional está mostrado na figura:



Na figura as variáveis escalares como a pressão são armazenadas nos nós • , enquanto que as variáveis vetoriais, como velocidade são armazenadas nas faces das células → (arrow) – velocidade horizontal, ↑ (arrow) – velocidade vertical. Desta forma os $\forall C$ para u e v são diferentes do $\forall C$ para a pressão.

No arranjo de *staggered grid* os nós de pressão coincidem com as faces das células dos $\forall C$ de u e desta forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\delta x_u}$$

Sendo δx_u é a largura do $\forall C_u$.

Similarmente:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_P - p_S}{\delta y_v}$$

Sendo δy_v é a largura do $\forall C_v$.

3. Equações Discretizadas da Quantidade de Movimento

Usando-se portanto *staggered grid* observa-se que os nós escalares estão localizados na intersecção de duas linhas cheias e são identificados por letras maiúsculas, no exemplo, ponto P na figura identificado por (I,J) a E, W, N, S (I+1,J; I-1,J; I, J+1; I,J-1). As velocidades u são armazenadas nas faces das células e e w do $\forall C$ escalar (combinação de letra minúscula e maiúscula exemplo i,J para $\forall C_u$ e I,j para $\forall C_v$).

Pode-se expressar a equação da quantidade de movimento de u para a velocidade na posição (i, J) , como:

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta \forall_u + S \Delta \forall_u$$

Ou

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J}$$

Onde: $b_{i,J} = S \Delta \forall_u$, correspondente ao termo fonte

$A_{i,J}$, área da face da célula do $\forall C_u$, a este ou oeste.

O gradiente de pressões é obtido pela interpolação linear entre os nós de pressão nas fronteiras do $\forall C_u$.

O termo $\sum a_{nb}u_{nb}$ representa a soma das vizinhanças E, W, N, S, dadas em $(i+1,J)$; $(i-1,J)$; $(i,J+1)$; $(i,J-1)$.

Os valores dos coeficientes $a_{i,J}$ e a_{nb} podem ser calculados usando os métodos de interpolação anteriores (como *upwind* e outros) utilizados para problemas de convecção e difusão. Esses coeficientes contém uma combinação de fluxos convectivos e difusivos.

Como apresentado nas aulas anteriores, para a discretização das equações de convecção-difusão é conveniente a definição de duas variáveis:

$F = \rho u \rightarrow$ fluxo de massa convectivo por unidade de área

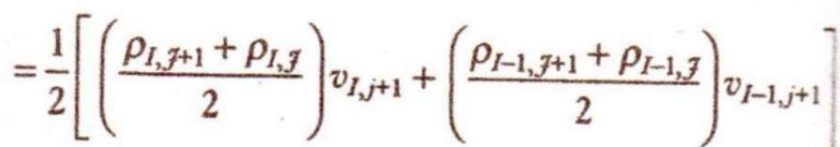
$D = \frac{\Gamma}{\delta x} \rightarrow$ processo difusivo através das faces.

Os valores dessas variáveis nas células podem ser definidos como:

$$F_w = (\rho u)_w \quad ; \quad F_e = (\rho u)_e$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} \quad ; \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}$$

Aplicando-se a notação aos valores de F e D para cada uma das faces e, w, n, s do $\forall C_u$:



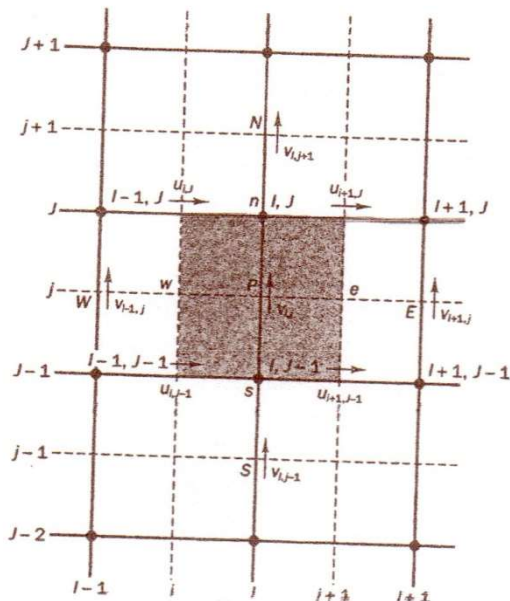
$$D_s = \frac{\Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j} + \Gamma_{I-1,j-1} + \Gamma_{I,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I-1,j+1} + \Gamma_{I,j+1} + \Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j}}{4(y_{j+1} - y_j)}$$

Analogamente para o $\forall C_v$:

$$a_{I,j} v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{I,j}$$

Aplicando-se a notação aos valores de F e D para cada uma das faces e, w, n, s do $\forall C_v$:



$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{I-1,j-1} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) u_{i,j-1} \right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I+1,j} + \rho_{I,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I+1,j-1}}{2} \right) u_{i+1,j-1} \right]$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{I,j-1} + F_{I,j}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j-1} + \rho_{I,j-2}}{2} \right) v_{I,j-1} + \left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) v_{I,j} \right]$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{I,j} + F_{I,j+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{I,j} + \rho_{I,j-1}}{2} \right) v_{I,j} + \left(\frac{\rho_{I,j+1} + \rho_{I,j}}{2} \right) v_{I,j+1} \right]$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{I-1,j-1} + \Gamma_{I,j-1} + \Gamma_{I-1,j} + \Gamma_{I,j}}{4(x_I - x_{I-1})}$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{I,j-1} + \Gamma_{I+1,j-1} + \Gamma_{I,j} + \Gamma_{I+1,j}}{4(x_{I+1} - x_I)}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{I,j-1}}{y_j - y_{j-1}}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I,j}}{y_{j+1} - y_j}$$

4. Algoritmo Simple

Basicamente é um método de tentativa e erro para o cálculo das pressões em uma malha *staggered grid*.

Inicialmente *SIMPLE* admite um campo de pressão “chutado” p^* . As equações discretizadas da quantidade de movimento são então resolvidas, obtendo-se o campo das velocidades u^* e v^* , de acordo com as equações:

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,j}^* - p_{I,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j}$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,j-1}^* - p_{I,j}^*)A_{I,j} + b_{I,j}$$

Define-se p' , u' , v' como valores de correção de modo que:

$$p = p^* + p'$$

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v'$$

Resulta portanto para a campo de correção de velocidade e de pressão:

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{I-1,j} - p_{I-1,j}^*) - (p_{I,j} - p_{I,j}^*)]A_{i,j}$$
$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{I,j-1} - p_{I,j-1}^*) - (p_{I,j} - p_{I,j}^*)]A_{I,j}$$

Ou:

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,j} - p'_{I,j})A_{i,j}$$
$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,j-1} - p'_{I,j})A_{I,j}$$

Os termos de correção das fronteiras são desprezados no algoritmo *SIMPLE*, resultando para as correções das equações da quantidade de movimento:

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

$$\text{where } d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \text{ and } d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}}$$

Finalmente resulta aplicando a correção:

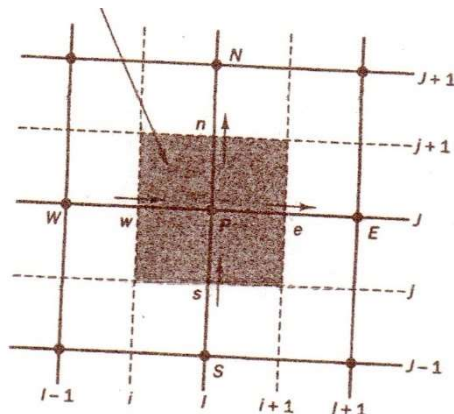
$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j})$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j})$$

$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(p'_{i,j} - p'_{i+1,j})$$

$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + d_{i,j+1}(p'_{i,j} - p'_{i,j+1})$$

Substituindo os valores de velocidade corrigidos na equação da continuidade discretizada resulta:

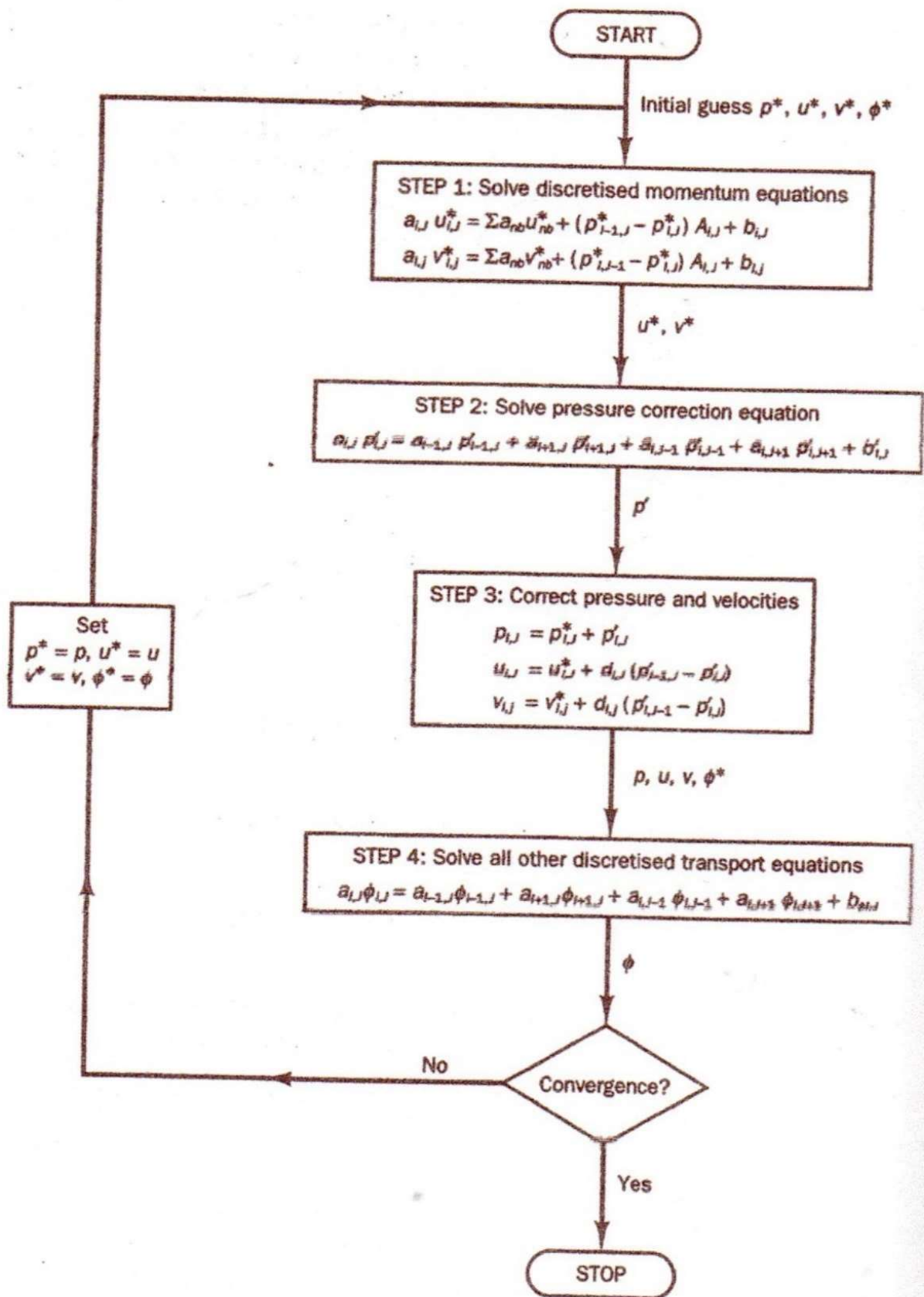


$$a_{i,j}p'_{i,j} = a_{i+1,j}p'_{i+1,j} + a_{i-1,j}p'_{i-1,j} + a_{i,j+1}p'_{i,j+1} + a_{i,j-1}p'_{i,j-1} + b'_{i,j}$$

Esta equação representa a equação da continuidade para a correção de pressão.

Onde:

$a_{i+1,j}$	$a_{i-1,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j-1}$	$b'_{i,j}$
$(\rho DA)_{i+1,j}$	$(\rho DA)_{i,j}$	$(\rho DA)_{i,j+1}$	$(\rho DA)_{i,j}$	$(\rho u^* A)_{i,j}$ - $\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j}$ $- (\rho v^* A)_{i,j+1}$



Referência

Versteeg, H.K.; Malalasekera, W. (2007) An Introduction to Computational Fluid Dynamics – The Finite Volume Method. Pearson Prentice Hall – second edition.