Vimos que usando a liberdade de escolha que temos sobre o potencial vetor $\vec{A}$, podemos forçar que $\vec{A}$ seja um campo solenóide

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{(calibre ou gauge de Coulomb)}$$

Para essa escolha particular (calibre ou gauge), $\vec{A}$ satisfaz uma eq. do tipo

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Em termos do campo $\vec{B}$, o teorema de Helmholtz garante que $\vec{B}$ possa ser escrito como

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (\text{pois } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0)$$

com o campo $\vec{A}$ sendo obtido a partir de uma integral sobre o rotacional de $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Então, se $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ vai suficientemente rápido a zero no infinito

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mathscr{r}} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} d\tau'$$

Para distribuições de corrente em 2 e 1 dimensão

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{\eta} da' \quad e \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}'}{\eta}$$

Na aula passada, vimos que uma densidade de corrente superficial uniforme $\vec{K} = K\hat{x}$ sobre o plano xy gera um campo magnético

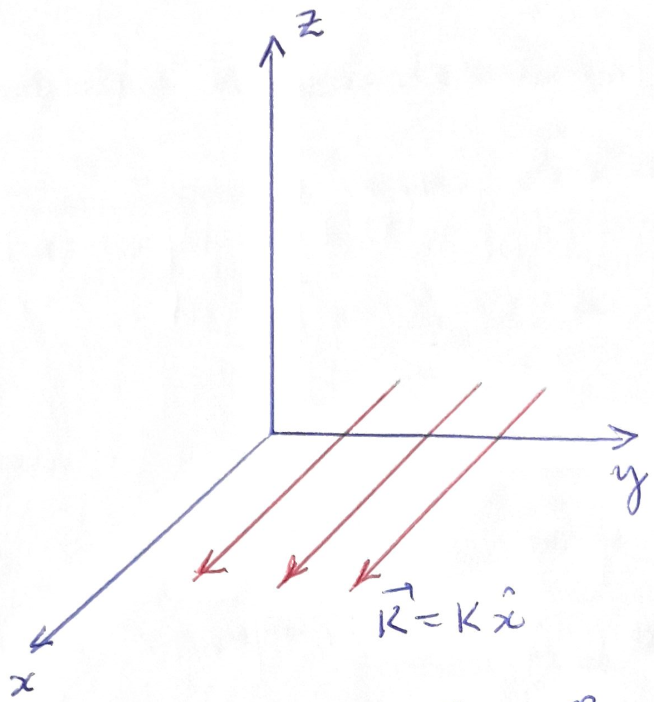
$$\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z < 0 \end{cases}$$

Determinemos então o potencial vetor $\vec{A}$ associado a esse campo $\vec{B}$.

Via integração direta

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{\eta} da' = \frac{\mu_0}{4\pi} K\hat{x} \int \frac{1}{\eta} da'$$

Perceba que $\vec{A} \parallel \vec{K} \Rightarrow A_y = A_z = 0$



$$\vec{r} = z\hat{z}$$
$$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$$
$$r = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\vec{A}(z) = \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{x}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi}\hat{x}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} ds \frac{s}{(s^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x}\int_0^{\infty} \frac{s}{(s^2 + z^2)^{1/2}} ds$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4}\hat{x}\int_{z^2}^{\infty} u^{-1/2} du = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{x}\sqrt{u}\Big|_{z^2}^{\infty} \longrightarrow \infty \ (!)$$

Esse resultado é esperado (ou seja, que a integral não converge) porque a densidade de corrente $\vec{K}$ não vai a zero suficientemente rápido no infinito. Nesse caso $\vec{K}$ é uniforme em todo o plano xy!

Precisamos de outro método aqui para determinar $\vec{A}$. Já sabemos que $\vec{A} \parallel \vec{K}$ e só depende de z

$$\vec{A} = A_x(z)\,\hat{x}$$

e que

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z<0 \end{cases}$$

$\vec{B}$ é descontínuo no plano xy

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_z}{\partial x}}\right)\hat{y} + \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_y}{\partial x}} - \cancelto{0}{\frac{\partial A_x}{\partial y}}\right)\hat{z}$$

Portanto

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}, & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}, & z<0 \end{cases}$$

$$A_x = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K z}{2} + C, & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 K z}{2} + C, & z<0 \end{cases}$$

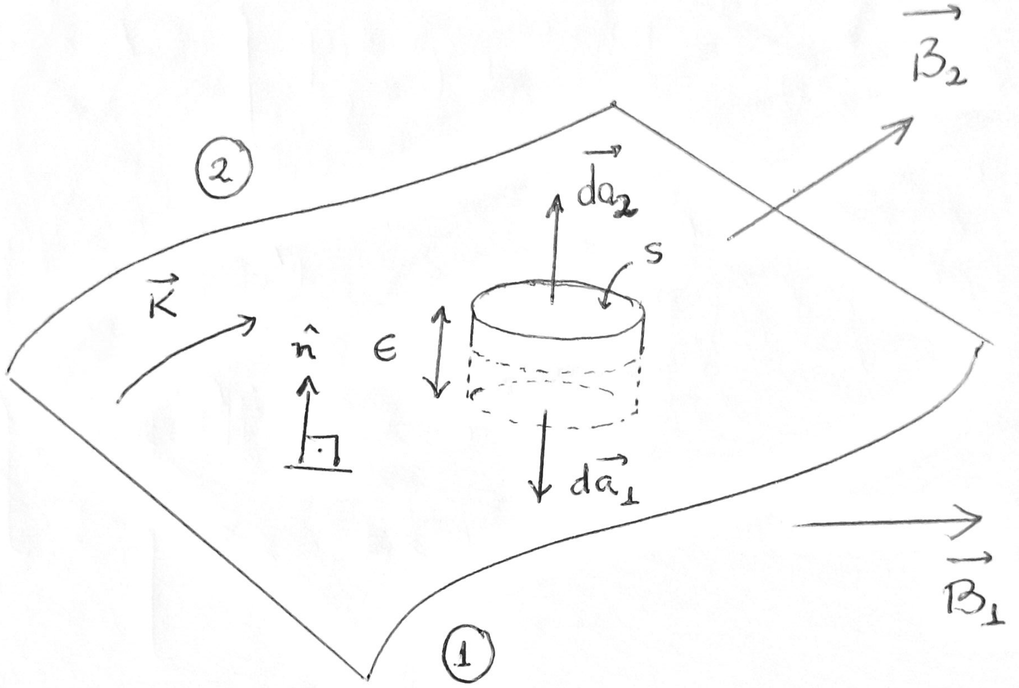
$\vec{A}$ é contínuo no plano xy

Condições de contorno na magnetostática

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, então pelo teorema da divergência

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

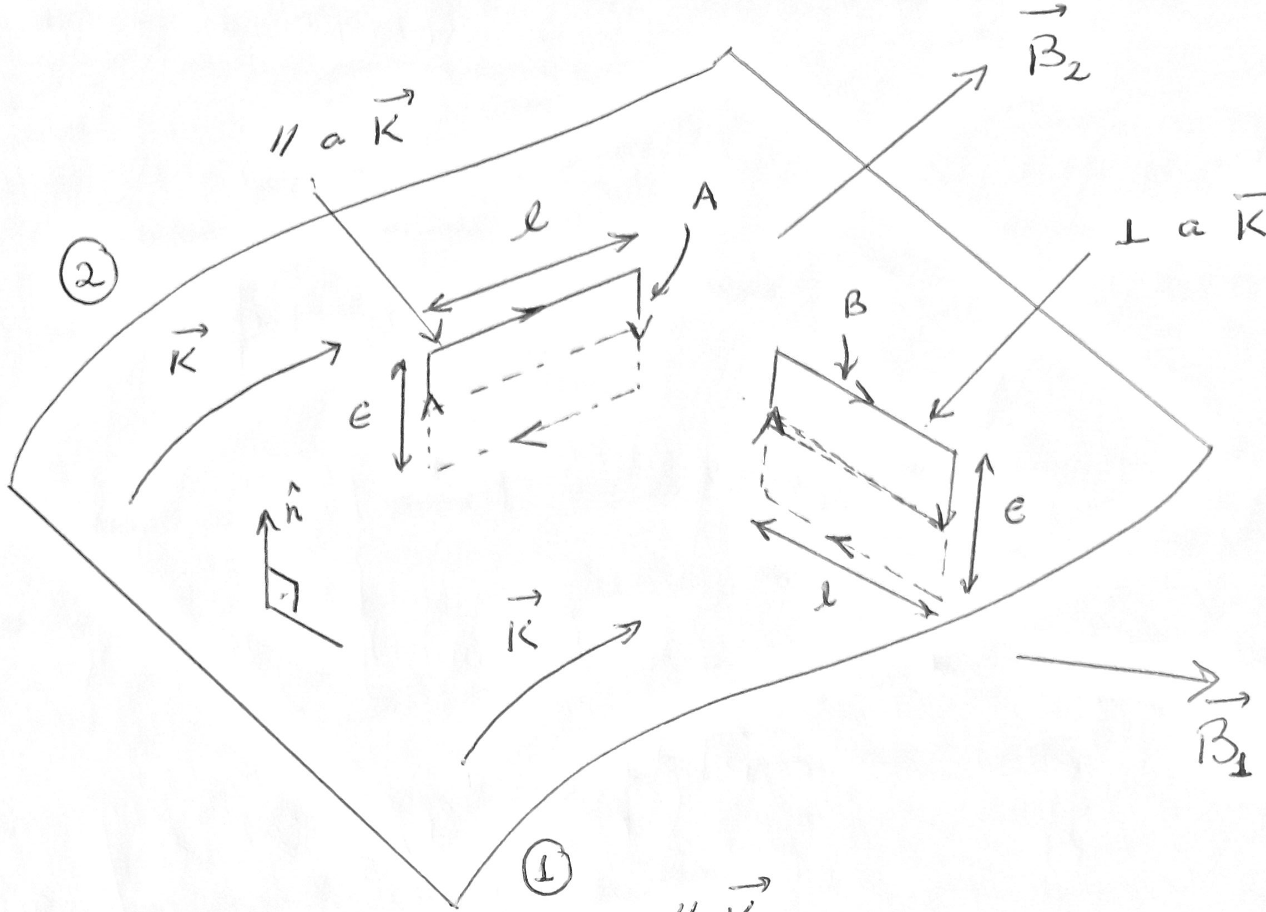
para qquer superfície fechada S.



$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = \left(B_2^{\perp} - B_1^{\perp}\right) S = 0 \Rightarrow \boxed{B_2^{\perp} = B_1^{\perp}}$$

a componente de $\vec{B}$ $\perp$ à superfície é contínua

a descontinuidade deve estar na componente $\parallel$ à superfície.



$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \left(B_2^{//K} - B_1^{//K} \right) \ell = 0$$

// $\vec{K}$

componente de $\vec{B}$ // $\vec{K}$ é contínua

$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint_B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \left(B_2^{\perp K} - B_1^{\perp K} \right) \ell = \mu_0 I = \mu_0 K \ell$$

paralela a superfície, mas ⊥ $\vec{K}$

$$\Downarrow$$

$$B_2^{\perp K} - B_1^{\perp K} = \mu_0 K$$

componente $\vec{B}$ paralela à superfície e ⊥ $\vec{K}$ é descontínua

As eqs anteriores podem ser resumidas em

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}}$$

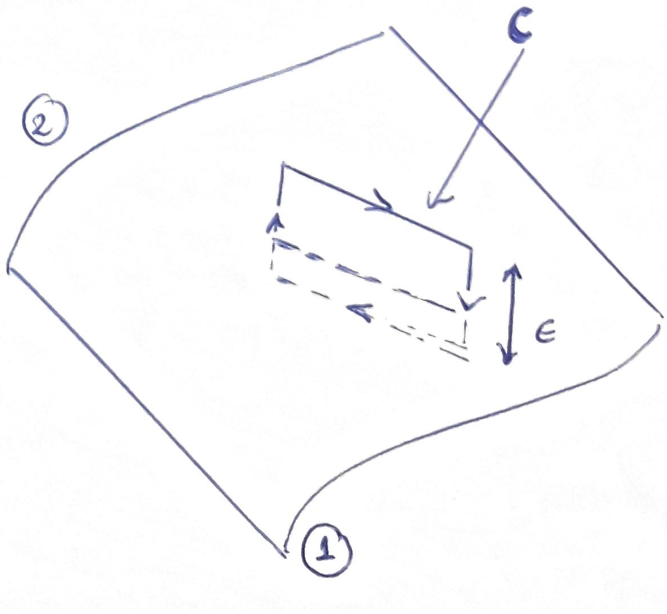
onde $\hat{n}$ aponta do meio 1 para o meio 2

Em termos do potencial vetor $\vec{A}$, no calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e, portanto, a componente de $\vec{A}$ $\perp$ à superfície é contínua. O comportamento da componente $//$ à superfície pode ser analisado por meio da integral de linha de $\vec{A}$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \underset{\substack{\text{fluxo}\\ \text{magnético}\\ \text{através de } S,\\ \text{cujo suporte é } C}}{\Phi_B}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = (A_2^{//} - A_1^{//})\, l$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \Phi_B = 0$$



Então

$$\boxed{\vec{A}_2 = \vec{A}_1} \quad \left(\text{calibre de Coulomb}\right)$$

O potencial vetor no calibre de Coulomb é contínuo numa superfície contendo uma densidade superficial de corrente.

Como $\vec{B}$ é descontínuo e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, concluímos que a descontinuidade deve estar nas derivadas de $\vec{A}$.

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$$

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \hat{n} \times (\vec{K} \times \hat{n})$$

$$\hat{n} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}_2 - \vec{\nabla} \times \vec{A}_1] = \mu_0 [\vec{K} \, \cancelto{1}{(\hat{n} \cdot \hat{n})} - \hat{n} \, \cancelto{0}{(\vec{K} \cdot \hat{n})}]$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}_2 - \vec{\nabla} \times \vec{A}_1] \times \hat{n} = -\mu_0 \vec{K}$$

Sem perda de generalidade, tomemos $\hat{n} = \hat{z}$ e $\vec{K} = K\hat{x}$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}_2 - \vec{\nabla} \times \vec{A}_1] \times \hat{z} = -\mu_0 K \hat{x}$$

Perceba que a descontinuidade de $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ao cruzar o plano xy está vindo da componente y do rotacional

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}_2)_y - (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1)_y = -\mu_0 K$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

logo

$$\frac{\partial A_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial z} - \underbrace{\left(\frac{\partial A_{2z}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1z}}{\partial x}\right)}_{=0} = -\mu_0 K \quad (*)$$

Usamos acima o fato de que a descontinuidade deve ocorrer quando cruzamos a superfície, ou seja, quando nos deslocamos ao longo de z.

No sistema de coordenadas adotado, temos também

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A}_2)_x - (\vec{\nabla}\times\vec{A}_1)_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{\partial A_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial A_{1z}}{\partial y}}_{=0} - \left(\frac{\partial A_{2y}}{\partial z} - \frac{\partial A_{1y}}{\partial z}\right) = 0 \quad (**)$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A}_2)_z - (\vec{\nabla}\times\vec{A}_1)_z = 0$$

$$\overbrace{\frac{\partial A_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1y}}{\partial x}}^{=0} - \underbrace{\left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial y} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right)}_{=0} = 0$$

Como no calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

Portanto

$$\frac{\partial A_{2z}}{\partial z} - \frac{\partial A_{1z}}{\partial z} = - \left\{ \underbrace{\frac{\partial A_{2x}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial A_{2y}}{\partial y} - \frac{\partial A_{1y}}{\partial y}}_{=0} \right\}$$

$$= 0$$

$$(***)$$

Eqs $(*)$, $(**)$ e $(***)$ permitem então escrever em forma compacta

$$\boxed{\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}}$$

derivada normal de $\vec{A}$ é descontínua

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}$ é a derivada normal de $\vec{A}$ e definida como

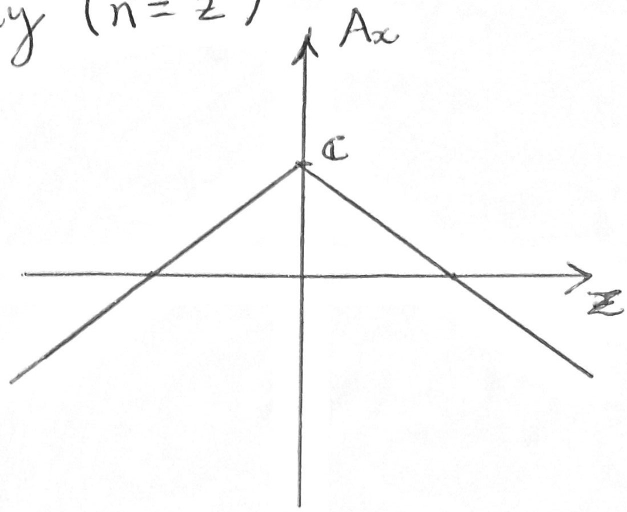
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} \equiv \left(\frac{\partial A_x}{\partial n}, \frac{\partial A_y}{\partial n}, \frac{\partial A_z}{\partial n} \right)$$

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n}$ é um vetor!

Voltemos ao caso da densidade de corrente superficial $\vec{K} = K\hat{x}$ no plano xy $(\hat{n} = \hat{z})$

$$\vec{A} = A_x \hat{x}$$

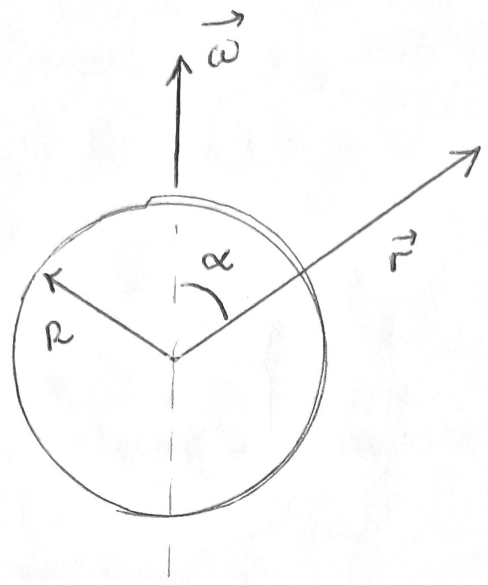
$$A_x = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K z}{2} + C, & z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K z}{2} + C, & z < 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{x}, & z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{x}, & z < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{A}_>}{\partial z} - \frac{\partial \vec{A}_<}{\partial z} = -\mu_0 \vec{K}$$

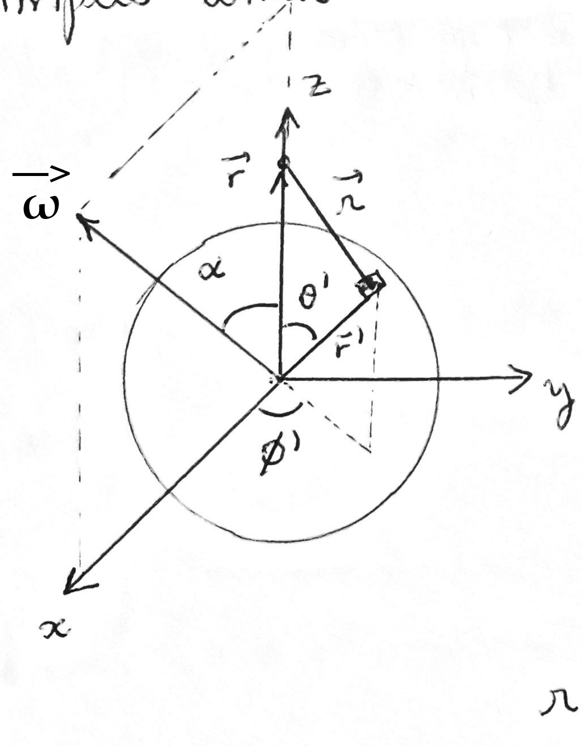
Casca esférica de raio R, densidade superficial de carga σ, girando com velocidade angular constante $\vec{\omega}$.



$\vec{A}(\vec{r}) = ?$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\mathscr{r}} da'$$

Para o cálculo da integral de superfície é mais simples tomar o eixo z ao longo de $\vec{r}$ e $\vec{\omega}$ contido no plano xz



$$\vec{r} = z\hat{z} = r\hat{z}$$

$$\vec{r}' = R\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{x} + R\sin\theta'\sin\phi'\,\hat{y} + R\cos\theta'\,\hat{z}$$

$$\mathscr{r} = \left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta'\right)^{1/2}$$

$$\vec{\omega} = \omega\sin\alpha\,\hat{x} + \omega\cos\alpha\,\hat{z}$$

Densidade de corrente

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{K} = \sigma \omega R \left[\sin\alpha\, \hat{x} + \cos\alpha\, \hat{z} \right] \times \left[\sin\theta' \cos\phi' \hat{x} + \sin\theta' \sin\phi' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z} \right]$$

$$= \sigma \omega R \Big[-\cos\alpha \sin\theta' \sin\phi'\, \hat{x} + \left(\cos\alpha \cos\theta' \cos\phi' - \sin\alpha \cos\theta' \right) \hat{y} + \sin\alpha \sin\theta' \sin\phi'\, \hat{z} \Big]$$

A integral no ângulo ϕ' elimina os termos proporcionais a $\sin\phi'$ e $\cos\phi'$ de $\vec{K}$, portanto

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin\alpha\, \hat{y}}{2} \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta' \right)^{1/2}} d\theta'}_{= I}$$

Mediante a troca de variável $u = \cos\theta'$ $(du = -\sin\theta' d\theta')$, a integral pode ser escrita como

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{u}{\left(R^2 + r^2 - 2Rru \right)^{1/2}} du =$$

$$v = R^2 + r^2 - 2Rru \Rightarrow dv = -\frac{du}{2Ru}$$

$$u = \frac{R^2 + r^2 - v}{2Ru}$$

Então

$$I = -\int_a^b v^{-1/2}\left(\frac{R^2+r^2-v}{2Rr}\right)\frac{dv}{2Rr} \qquad \begin{cases} a = (R+r)^2 \\ b = (R-r)^2 \end{cases}$$

$$= -\left(\frac{R^2+r^2}{4R^2r^2}\right)\int_a^b v^{-1/2}dv + \frac{1}{4R^2r^2}\int_a^b v^{1/2}dv$$

$$= -\left[\frac{R^2+r^2}{2R^2r^2}v^{1/2} - \frac{1}{6R^2r^2}v^{3/2}\right]_a^b$$

$$= -\frac{1}{6R^2r^2}\left[3(R^2+r^2)v^{1/2} - v^{3/2}\right]_a^b$$

$$= -\frac{1}{3R^2r^2}\left[(R^2+r^2+Rru)\sqrt{R^2+r^2-2Rru}\right]_{-1}^{+1}$$

$$= -\frac{1}{3R^2r^2}\left[(R^2+r^2+Rr)|R-r| - (R^2+r^2-Rr)(R+r)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{r}{R^2}, & r < R \\ \frac{2}{3}\frac{R}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

Lembrando que

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = -\omega r \sin\alpha\, \hat{y}$$

Temos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 R \sigma}{3}\, \vec{\omega}\times\vec{r} \quad , & r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3}\, \vec{\omega}\times\vec{r} \quad , & r \geq R \end{cases}$$

Regressando ao sistema de coordenadas em que

$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ e $\vec{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$,

podemos escrever

$$\vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 R \omega \sigma}{3}\, r\sin\theta\, \hat{\phi} \quad , & r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3}\, \dfrac{\sin\theta}{r^2}\, \hat{\phi} \quad , & r \geq R \end{cases}$$

O campo magnético na região $r < R$ é

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\phi\right)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\phi\right)\hat{\theta}$$

$$= \frac{2\mu_0 R\omega\sigma}{3}\underbrace{\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}_{=\hat{z}} = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \omega \hat{z}$$

$$= \frac{2}{3}\mu \sigma R \vec{\omega}$$

Ou seja, $\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \sigma R \vec{\omega}$ é uniforme no interior da casca $(r < R)$.

Exercício:

Calcule o campo $\vec{B}(r > R)$

Calcule a descontinuidade na derivada normal de $\vec{A}$, ou seja, $\frac{\partial \vec{A}_>}{\partial r} - \frac{\partial \vec{A}_<}{\partial r}$ e mostre que ela é igual a $-\mu_0 \vec{K}$.