Sistemas Inteligentes

UNIDADE 8 – Sistemas Fuzzy
(Processo de Inferência)

Prof. Ivan Nunes da Silva

1. Introdução à Inferência Fuzzy

Aspectos relevantes

- Sistema de inferência fuzzy permite o tratamento e manipulação de informações incertas e imprecisas, as quais estão representadas por uma família de conjuntos fuzzy.
- Tais sistemas de inferência oferecem uma forma sistemática para a modelagem de sistemas, cujas informações a respeito dos mesmos são fornecidas de forma qualitativa.
- Frente a este contexto, a representação do sistema pode ser realizada por meio de **variáveis linguísticas**, as quais expressam o comportamento do sistema.
- Em suma, em várias situações, torna-se mais simples explicitarmos a dinâmica de um sistema por intermédio de sentenças dos seguintes tipos:
  - A "velocidade" é "alta".
  - A "pressão" é "média".
  - A "temperatura" é "pequena".
  - A "corrente" é "muito baixa".

2. Variáveis Linguísticas

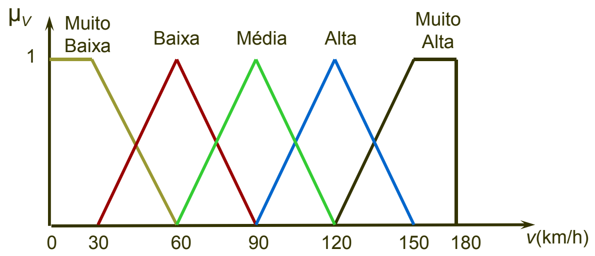
Atributos de caracterização

- **Variáveis linguísticas** são aquelas que permitem a descrição de informações que estão normalmente disponibilizadas de forma qualitativa.
- Estas são caracterizadas pelos seguintes atributos:
  - **Nome da variável (*x*)** ➔ É o rótulo associado a uma variável linguística em específico.
  - **Conjunto de termos (T_x)** ➔ São os nomes associados aos valores linguísticos da respectiva variável linguística.
  - **Universo de Discurso (U_x)** ➔ É o domínio (espaço) em que cada variável linguística está definida.
  - **Funções de Pertinência (μ_x)** ➔ São os conjuntos fuzzy que representam cada valor pertencente ao conjunto de termos da variável linguística.

2. Variáveis Linguísticas

Exemplo de especificação de atributos

- Seja a variável linguística representada por:



- Para o exemplo mostrado no gráfico, tem-se:
  - **Nome da variável** ➔ ***v*** = {velocidade}.
  - **Conjunto de termos** ➔ T_v = {Muito Baixa, Baixa, Média, Alta, Muito Alta}.
  - **Universo de Discurso** ➔ $U_v \in [0;180]$
  - **Funções de Pertinência** ➔ São dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

3. *Operações c/ Variáveis Linguísticas*

Utilização de conectivos

- As principais operações entre variáveis linguísticas é realizada por meio da utilização dos conectivos "**E**", "**OU**" e "**NÃO**".
- De fato, os conectivos "**E**" e "**OU**" são empregados para compor os relacionamentos lógicos entre os termos das variáveis linguísticas. Como exemplo, tem-se:
  - **Se velocidade é "alta" E aceleração é "média"**
    Então pressão no freio é "alta".
  - **Se velocidade é "média" OU aceleração é "alta"**
    Então pressão no freio é "média".
- Esses conectivos "**E**" e "**OU**" são também definidos por meio de operadores de interseção (***T*-norma**) e união (***S*-norma**).

5

3. *Operações c/ Variáveis Linguísticas*

Especificação de conectivos

Operadores Para Conectivos "E" e "OU"

- O resultado da aplicação do conectivo "**E**" (ou "**OU**"), entre dois termos *A* e *B* de uma determinada variável linguística, ambos pertencentes ao mesmo universo de discurso, é formado por todos os valores de pertinência retornados a partir da aplicação do operador ***T*-norma** (ou ***S*-norma**) sobre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x)\ \mathrm{E}\ \mu_B(x) = \mu_A(x)\ T\ \mu_B(x)$$

$$\mu_A(x)\ \mathrm{OU}\ \mu_B(x) = \mu_A(x)\ S\ \mu_B(x)$$

- Utilizando para ***T*-norma** o operador "mínimo" e para ***S*-norma** o operador "máximo", tem-se:

$$\mu_A(x)\ \mathrm{E}\ \mu_B(x) = \min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\ \}$$

$$\mu_A(x)\ \mathrm{OU}\ \mu_B(x) = \max\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\ \}$$

Operadores Para Conectivo "NÃO"

- Para a operação de complemento {"**NÃO**"}, tem-se:

$$\mathrm{NÃO}(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$

6

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

- Para os termos A e B, definidos no universo de discurso X = {-2, -1, 0, 1, 2}, tem-se os seguintes graus de pertinência:

  A = 0.1/-2 + 0.6/-1 + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.9/2

  B = 0.4/-2 + 0.3/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.0/2

  Utilizando-se o operadores “min”e “max”, calcule as seguintes operações:

  a) $\mu_A(x)$ **E** $\mu_B(x)$ = 0.1/-2 + 0.3/-1 + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.0/2

  b) μ_A (x) **OU** μ_B(x) = 0.4/-2 + 0.6/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.9/2

  c) **NÃO**(μ_A(x)) = 0.9/-2 + 0.4/-1 + 0.6/0 + 0.7/1 + 0.1/2

Exemplo 2

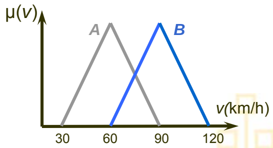
- Sejam os termos A e B, representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

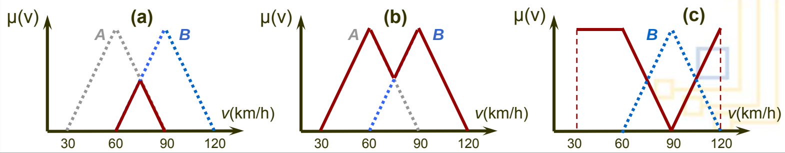
  a) $\mu_A(v)$ **E** $\mu_B(v)$

  b) $\mu_A(v)$ **OU** $\mu_B(v)$

  c) **NÃO**(μ_B(v))

Universo de Discurso
$V \in [30, 120]$





4. Aspectos de Relações Fuzzy

Conceitos introdutórios

- Uma relação matemática indica como estão associados os elementos de um conjunto em relação aos elementos de um outro conjunto.
- Nas relações fuzzy, o nível de associação entre dois conjuntos fuzzy é também fornecida por meio de graus de pertinência que possuem valores entre 0 e 1.
- Assim, este relacionamento podem ser definidos no subespaço constituído pelo produto cartesiano dos respectivos elementos dos universos de discurso, os quais são representados por:

$$R(x,y) = \sum_{(x,y)\in X_x Y} \mu_R(x,y)/(x,y)$$

Exemplo: Seja a relação fuzzy definida pela regra “x está em torno de y”, onde $x \in X$ e $y \in Y$, cujos universos de discurso discretos são especificados por $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Esboçar a forma de representação matricial desta relação.

$$R(x,y) = 0.8/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.7/(x_1,y_3) + 0.4/(x_2,y_1) + 0.9/(x_2,y_2) + 0.6/(x_2,y_3) + 0.1/(x_3,y_1) + 1.0/(x_3,y_2) + 0.4/(x_3,y_3)$$

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 1.0 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Composição de relações fuzzy

- A combinação de duas ou mais relações fuzzy, definidas em espaços distintos (produtos cartesianos diferentes), pode ser feitas por meio de operadores que permitem a composição das respectivas relações.
- Deve-se ressaltar que a composição de relações fuzzy possui um papel fundamental nos procedimentos envolvendo computação baseada em regras fuzzy e, principalmente, nos processos de implementação de estimadores e controladores fuzzy.
- A principal técnica de composição de relações fuzzy é conhecida como "Composição Max-Min"

9

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Composição Max-Min

- Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente nos produtos cartesianos discretos X_xY e Y_xZ. A composição do tipo Max-Min efetuadas sobre as matrizes representando $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida por:

$$RoS(x,z) = \max_{y \in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\ \mu_S(y,z)\}\}$$

onde a matriz resultante RoS está agora definida no produto cartesiano X_xZ.

- Como exemplo, sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente em X_xY e Y_xZ, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

10

4. Aspectos de Relações Fuzzy

Resultado da aplicação da composição Max-Min

- A matriz representando a composição Max-Min de $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida pelos seguintes elementos:

$$RoS(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \left[\begin{array}{c} \mu_{RoS}(x_1,z_1) \\ \mu_{RoS}(x_2,z_1) \\ \mu_{RoS}(x_3,z_1) \end{array}\right. & \begin{array}{c} \mu_{RoS}(x_1,z_2) \\ \mu_{RoS}(x_2,z_2) \\ \mu_{RoS}(x_3,z_2) \end{array} & \left.\begin{array}{c} \mu_{RoS}(x_1,z_3) \\ \mu_{RoS}(x_2,z_3) \\ \mu_{RoS}(x_3,z_3) \end{array}\right] \end{array}$$

- Aplicando a regra de composição Max-Min, obtêm-se os elementos da matriz $RoS(x,z)$, dados por:

$\mu_{RoS}(x_1,z_1)$ = max{min{0.1,0.2}; min{0.6,0.4}; min{0.4,1.0}; min{0.9,0.9}} = 0.9

$\mu_{RoS}(x_1,z_2)$ = max{min{0.1,0.8}; min{0,6,0.3}; min{0.4,0.0}; min{0.9,0.7}} = 0.7

$\mu_{RoS}(x_1,z_3)$ = max{min{0.1,0.6); min{0,6,0.1}; min{0.4,0.7}; min{0.9,0.2}} = 0.4

- De maneira similar, obter-se-iam os demais elementos, dados por:

$\mu_{RoS}(x_2,z_1) = 0.8$; $\mu_{RoS}(x_2,z_2) = 0.8$; $\mu_{RoS}(x_2,z_3) = 0.7$

$\mu_{RoS}(x_3,z_1) = 0.4$; $\mu_{RoS}(x_3,z_2) = 0.5$; $\mu_{RoS}(x_3,z_3) = 0.5$

5. Processo de Inferência Fuzzy

Aspectos introdutórios

- O processo de inferência fuzzy, também conhecido como raciocínio aproximado, permite mapear o conhecimento de um sistema por meio de regras fuzzy do tipo “Se-então”.
- Mediante a análise de um conjunto finito dessas regras, pode-se então determinar, por meio do processo de inferência, o comportamento das variáveis de saída do sistema a ser mapeado.
- Assim, as regras associadas ao processo de inferência fuzzy possuem a seguinte forma:

  Se <condição>
  então <ação>

- Normalmente, os processos de inferência fuzzy são baseados na regra de ***Modus Ponens*** generalizado, que é explicitado por:

  Fato: *x* é *A*’
  Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*
  - - - - - - - - - - - - - - - - -
  Consequência: *y* é *B*’

5. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (I)

- Seja então a regra de *Modus Ponens* generalizada explicitada por:

  Fato: *x* é *A'*
  Regra: Se *x* é *A* **então** *y* é *B*
  \- -
  Consequência: *y* é *B'*

- Sua interpretação pode ser formulada da seguinte maneira:
  1. O fato observado *A'* é um sinal medido que é assumido ser verdadeiro.
  2. Se o sinal medido *A'* é assumido como verdadeiro, então o antecedente "*x* é *A*" da referida regra que foi ativada é também verdadeiro.
  3. Se o antecedente "*x* é *A*" é verdadeiro e sabendo-se que "*x* é *A*" implica no consequente "*y* é *B*", então este consequente é também verdadeiro.
  4. Se o consequente "*y* é *B*" é verdadeiro, então é bem verdade que o resultado final da implicação é que realmente *y* é *B'*, em que *B'* é o valor de saída.

13

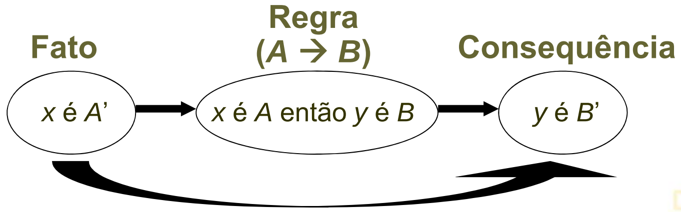
5. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (II)

- Em suma, o conjunto de "fato", "regra" e "consequência":

  Fato: *x* é *A'*
  Regra: Se *x* é *A* **então** *y* é *B*
  \- -
  Consequência: *y* é *B'*

  pode ser interpretado geometricamente por:



$$B'(y) = A'(x) \circ R_{A \to B}(x,y)$$

Onde: "**o**" indica uma operação de composição Max-Min, e $R_{A \to B}$ é uma função de implicação.

14

5. Processo de Inferência Fuzzy

Principais operadores de implicação

- A obtenção da função de pertinência relativa à implicação $R_{A \to B}$ pode ser computada utilizando os próprios valores de pertinência associados às variáveis *A* e *B*.
- Assim, sejam duas variáveis linguísticas *x* e *y*, com termos tendo valores *A* e *B*, respectivamente. A função de pertinência de $\mu_{R_{A \to B}}$ pode ser obtida por meio dos seguintes operadores:

MAMDANI $\Rightarrow \mu_{R_{A\to B}}(x,y) = \min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(y)\ \}$

Também conhecido como operador "min" de Mamdani.

ZADEH $\Rightarrow \mu_{R_{A\to B}}(x,y) = \max\{1-\mu_A(x),\ \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\ \}\}$

Também conhecido como operador "max-min" de Zadeh.

LARSEN $\Rightarrow \mu_{R_{A\to B}}(x,y) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$

Também conhecido como operador "produto" de Larsen.

ARITMÉTICO $\Rightarrow \mu_{R_{A\to B}}(x,y) = \min\{1,\ 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$

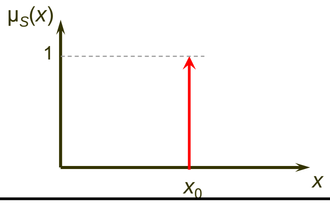
BOOLEANO $\Rightarrow \mu_{R_{A\to B}}(x,y) = \max\{1-\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}$

15

5. Processo de Inferência Fuzzy

Conceito de Singleton

- Um "Singleton" é um caso particular de conjunto fuzzy normalizado, cujo domínio é um único ponto x_0 (número crisp), pertencente a *X*, com $\mu(x_0) = 1$.
- São especialmente utilizados para mapear os sinais de entrada do sistema fuzzy, os quais são geralmente representados por valores pontuais advindos do meio externo.
  - Exemplos: valores pontuais de temperatura, velocidade, corrente elétrica, vazão, pressão, etc.
- De fato, o valor medido é considerado como sendo verdadeiro, estando, assim, totalmente incluído dentro do conjunto fuzzy associado com a sua respectiva variável.
- Portanto, um conjunto fuzzy "Singleton" *S*, associado ao ponto x_0, pode ser representado por:



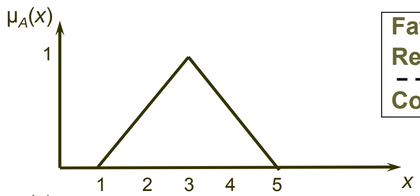
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

16

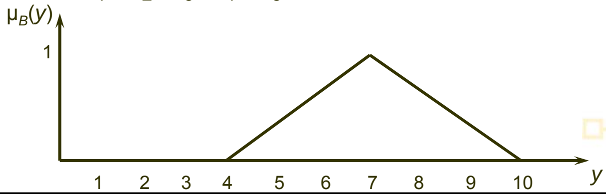
6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Definição de variáveis

- Sejam os conjuntos *A* e *B*, definidos respectivamente nos universos de discurso *X* = {2, 3, 4} e *Y* = {5, 6, 7, 8, 9}, os quais são representados pelos gráficos a seguir.
- Utilizando o operador de implicação de **Mamdani**, assim como a regra de composição **Max-Min**, calcule então o valor do conjunto fuzzy de saída *B'* inferido a partir de um sinal *A'* igual a 4.



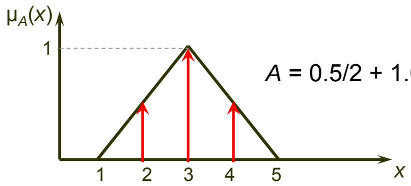
Fato: *x* é *A'*
Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*
\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Consequência: *y* é *B'*



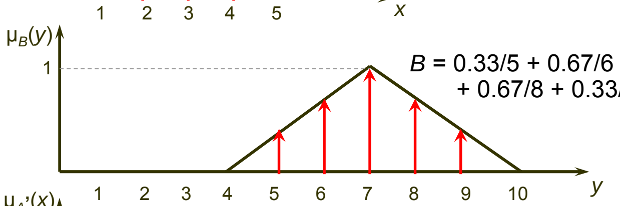
6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Discretização de variáveis

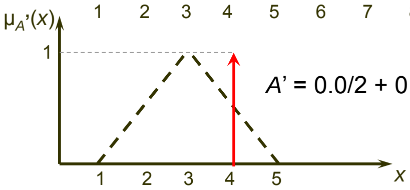
- Utilizando a representação discreta para todas as variáveis, tem-se:



A = 0.5/2 + 1.0/3 + 0.5/4



B = 0.33/5 + 0.67/6 + 1.0/7 + + 0.67/8 + 0.33/9



A' = 0.0/2 + 0.0/3 + 1.0/4

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Obtenção de valores da implicação

- Obtendo o valor de $\mu_{R_{A \to B}}(x,y)$

$$\mu_{R_{A \to B}}(x,y) = 0.33/(2,5) + 0.50/(2,6) + 0.50/(2,7) + 0.50/(2,8) + 0.33/(2,9) + \\ + 0.33/(3,5) + 0.67/(3,6) + 1.00/(3,7) + 0.67/(3,8) + 0.33/(3,9) + \\ + 0.33/(4,5) + 0.50/(4,6) + 0.50/(4,7) + 0.50/(4,8) + 0.33/(4,9)$$

- Obtendo o valor de $B'(y)$ ➔ $B'(y) = A'(x) \circ R_{A \to B}(x,y)$

$$B'(y) = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \circ \begin{array}{c|ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 3 & 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 4 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{array}$$

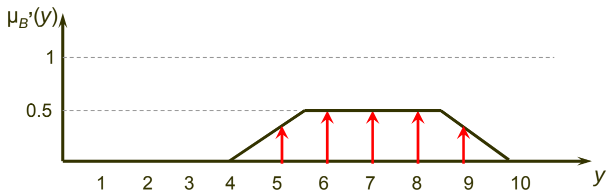
$\mu_{B'}(5)$ = max{min{0,0.33}; min{0,0.33}; min{1,0.33}} = 0.33
$\mu_{B'}(6)$ = max{min{0,0.50}; min{0,0.67}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(7)$ = max{min{0,0.50}; min{0,1.00}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(8)$ = max{min{0,0.50}; min{0,0.67}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(9)$ = max{min{0,0.33}; min{0,0.33}; min{1,0.33}} = 0.33

6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Representação gráfica do resultado da inferência

- A partir dos valores obtidos para *B*', tem-se a representação gráfica de sua saída, ou seja:

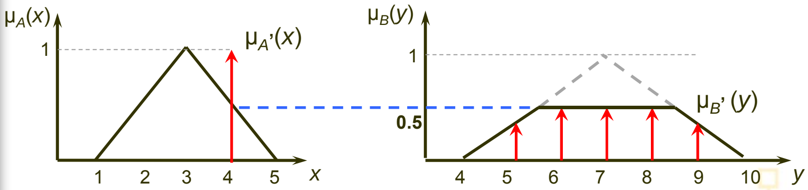
$\mu_{B'}(5)$ = max{min{0,0.33}; min(0,0.33}; min{1,0.33}} = 0.33
$\mu_{B'}(6)$ = max{min{0,0.50}; min{0,0.67}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(7)$ = max{min{0,0.50}; min{0,1.00}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(8)$ = max{min{0,0.50}; min{0,0.67}; min{1,0.50}} = 0.50
$\mu_{B'}(9)$ = max{min{0,0.33}; min{0,0.33}; min{1,0.33}} = 0.33



6. Exemplo de Inferência Fuzzy

Interpretação geométrica

- Quando muitos pontos de discretização são utilizados no processo de inferência, tem-se então um elevado esforço computacional para a obtenção da saída.
- A fim de evitar este elevado esforço computacional, o resultado da implicação de Mamdani pode ser também alcançado a partir de sua interpretação geométrica.



- Passos para obter *B*'(*y*):
  1. Assim, para obter o valor de *B*', basta-se então verificar o grau de pertinência ativado por *A*' frente ao conjunto *A*.
  2. Em seguida, o resultado de *B*'(*y*) será a respectiva região fuzzy obtida pelo corte no conjunto *B* frente àquele valor de pertinência obtido no passo anterior.

Fim da Apresentação

Núcleo de Pesquisa em
AUTOMAÇÃO INTELIGENTE
de Processos e Sistemas