3.1 Derivada: conceito e interpretações

Definição 3.1 Derivada de uma função. Considere $y = f(x)$ uma função real de variável real, a derivada dessa função denotada por $y' = f'(x)$ (notação de Isaac Newton) ou por $\frac{dy}{dx}$ (notação de Gottifried Leibniz) é dada por:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se o limite existir e for finito.

Exemplo 3.1 Encontrar a derivada das funções a seguir. pela definição

a. $y = 3x + 4$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)+4-(3x+4)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3x} + 3\Delta x \cancel{+4} \cancel{-3x} \cancel{-4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 3$$

$$y' = 3$$

b. $y = x^2 - 1$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-1} \cancel{-x^2} \cancel{+1}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$y' = 2x$$

Exercícios: *Encontre a derivadas das funções a seguir, pela definição:*

$f(x) = 5x+2$

$f(y) = 5y+2$

$f(2) = 5.2+2$

$f(a+b) = 5(a+b)+2$

a) $y = 5x + 2$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)+2-(5x+2)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)+2 - (5x+2)}{\Delta x}$$

$f(a) = 5 \cdot a + 2$

$f(a+b) = 5(a+b)+2$

$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)+2$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{5x} + 5\Delta x \cancel{+2} \cancel{-5x} \cancel{-2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5 \qquad y' = 5$$

b) $y = 2x^2 + x$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - (2x^2 + x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + \cancel{x} + \Delta x \cancel{-2x^2} \cancel{-x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4x + 2\Delta x + 1)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x + 1 = 4x + 1 \qquad y' = 4x + 1$$

Definição 3.2 Interpretação geométrica. Considere $y = f(x)$ uma função e seja $P(x, y)$ um ponto da curva do gráfico dessa função.

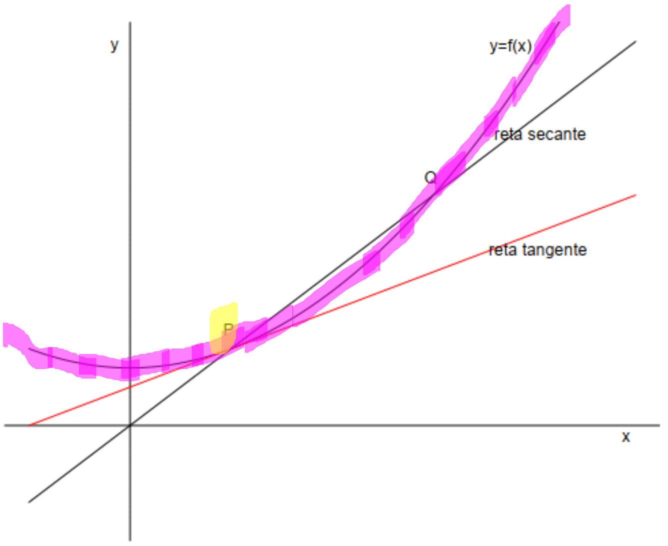
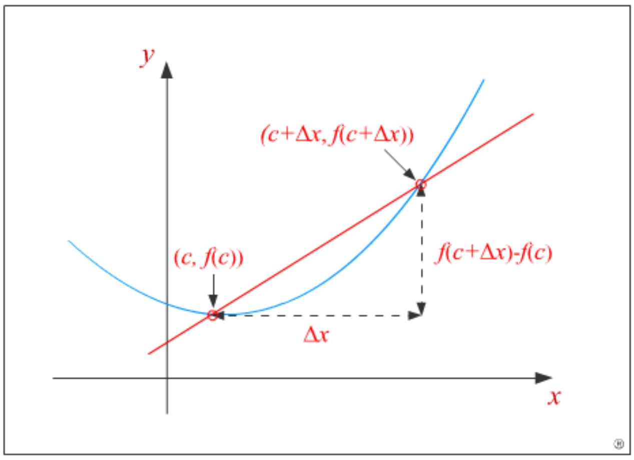
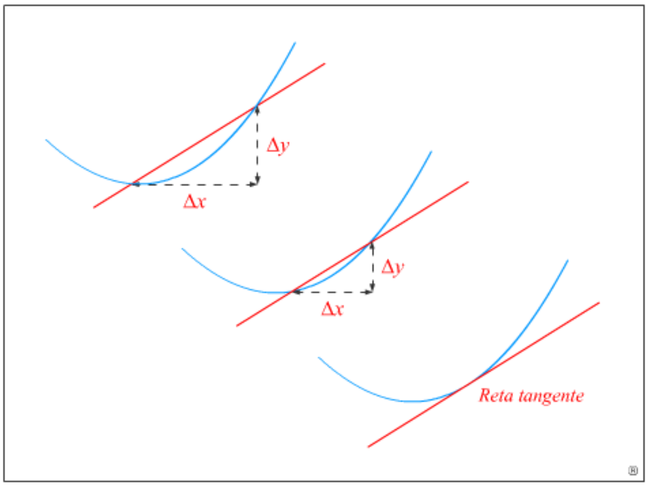


Figura 3.1: Interpretação geométrica da derivada





Vamos dar um acréscimo Δx a variável x, em consequência y sofrerá um acréscimo Δy, constituindo o ponto Q. Na figura acima, a reta secante à curva que passa pelos pontos P e Q tem coeficiente angular:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Façamos $\Delta x \to 0$, assim a reta secante gira em torno do ponto P e, no limite, a reta secante tende para a reta tangente à curva no ponto P com coeficiente angular:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 3.2 Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = -x^2 + 5x - 6$ no ponto $P(1, -2)$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - 6 - (-x^2 + 5x - 6)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{-x^2} - 2x\Delta x - \Delta x^2 + \cancel{5x} + 5\Delta x \cancel{-6} + \cancel{x^2} - \cancel{5x} + \cancel{6}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{[illegible]}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(-2x - \Delta x + 5)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} -2x - \Delta x + 5 = -2x + 5$$

$$y' = -2x + 5$$

$$m = ? \to P(1, -2)$$

$$m = -2(1) + 5 \quad m = 3$$

equação da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - (-2) = 3(x - 1)$$

$$y + 2 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 - 2$$

$$y = 3x - 5$$

3.2 Diferenciabilidade e continuidade

Definição 3.4 Diferenciabilidade. Se existe $f'(x = a)$ então dizemos que $f(x)$ é diferenciável em $x = a$. Porém como consequência do Teorema da existência do limite devemos observar que dada uma função $y = f(x)$, a sua derivada $y' = f'(x)$ existe se e somente se:

i. Existe $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ii. Existe $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iii. $f'_+(x) = f'_-(x)$

Exemplo 3.4 Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -4; \\ -x-6, & \text{se } x > -4. \end{cases}$$

verificar se $y = f(x)$ é contínua e diferenciável em $x = -4$.

verificar continuidade:

i) $f(-4) = -4+2 = -2$ ✓

ii) $\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} -x-6 = -2$ ($-(-4)$)

$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-} x+2 = -2$

são iguais ✓ $\exists \lim_{x\to -4} f(x) = -2$

iii) $f(-4) = \lim_{x\to -4} f(x)$ ✓

$-2 = -2$

$\therefore$ $f(x)$ é contínua em $x = -4$

verificar diferenciabilidade:

$x = -4$

$\Delta x \to 0^+$ $\qquad$ $\Delta x \to 0^-$

$x = -4 + \Delta x$ $\qquad$ $\Delta x \to x+4$

$\Delta x = \underbrace{x}_{-4^+} + 4$ $\qquad$ -4

$-5 \quad -4 \quad -3$

i) $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(x+\Delta x) - 6 - (-x-6)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{-x} - \Delta x \cancel{-6} + \cancel{x} + \cancel{6}}{\Delta x} = -1$

i. Existe $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ii) $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cancel{(x}+\Delta x) \cancel{+2} \cancel{-x} \cancel{-2}}{\Delta x} = 1$

ii. Existe $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iii) $f'_+(x) = -1 \neq f'_-(x) = 1$

iii. $f'_+(x) = f'_-(x)$

Ny $f'_+(x) = -1 \neq f'_-(x) = 1$

$\therefore$ $f'(x)$ não assume derivada em $x = -4$

Teorema 3.1 Se uma função $y = f(x)$ é diferenciável em $x = a$ então ela é contínua em $x = a$.

(A recíproca desse teorema nem sempre é verdadeira)

Teorema 3.2 Se uma função não é contínua em $x = a$ então ela não é diferenciável em $x = a$.

Exemplo 3.5 Dada a função:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \\ 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

verificar se $y = f(x)$ é contínua e diferenciável em $x = 0$.

i) $f(0) = 0$ ✓

ii) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2 = -2$

limites laterais são diferentes

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ não é contínua e por sua vez não é diferenciável no ponto $x = 0$

3.3 Principais Regras e Propriedades de Derivação

1. Se $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

   Demonstração:

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Ex: $y = 5 \to y' = 0$ $\qquad f(x) = \sqrt{\pi} \to f'(x) = 0$

2. Se $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

$f(x) = x^n$

$f'(x) = n\,x^{n-1}$

Exemplo: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1$$

$$f'(x) = 2x$$

a) $y = x^2$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{\Delta x}} = 2x$$

3. Se $g(x) = cf(x)$ então $g'(x) = cf'(x)$, com $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração: $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - c\,f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x}$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

Exemplo 3.6 Encontrar as derivadas das funções a seguir.

a. $y = 2x^3$ $\qquad y' = 2 \cdot 3x^2 \to y' = 6x^2$

b. $y = -5x^4$ $\qquad y' = -20x^3$

c. $y = \frac{3}{?}x^6$ $\qquad y' = 3 \cdot 6x^5 \quad y' = 18x^5 \quad y' = 9x^5$

c. $y = \frac{3}{4}x^6$ $\quad y' = \frac{3 \cdot 6}{4} x^5 \quad y' = \frac{18}{4} x^5 \quad y' = \frac{9}{2} x^5$

4. **Derivada da soma.** Seja $h(x) = f(x) + g(x)$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Demonstração:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

Exemplo 3.7 Encontrar as derivadas das funções a seguir.

a. $y = 5x^3 - 3x^2 + 7x^1 - 10$

$$y' = 5.3x^2 - 3.2x + 7.1x^0 - 0$$

$$y' = 15x^2 - 6x + 7$$

b. $y = \frac{3}{2}x^4 - x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7$

$$y' = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} x^3 - 3x^2 - \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} x + 0$$

$$y' = 6x^3 - 3x^2 - 5x$$

5. **Derivada do produto.** Seja $h(x) = f(x).g(x)$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então $h'(x) = [f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'v + uv'$$

Exemplo 3.8 Encontrar a derivada da função: $h(x) = \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{(2x^3 + 4)}_{v}$.

$$h'(x) = 2x(2x^3+4) + x^2(6x^2)$$
$$h'(x) = 4x^4 + 8x + 6x^4$$
$$h'(x) = 10x^4 + 8x$$

ou

$$h(x) = x^2(2x^3+4)$$
$$h(x) = 2x^5 + 4x^2$$
$$\Rightarrow h'(x) = 10x^4 + 8x$$

Exemplo: Encontrar a derivada da função: $h(x) = (3x + 2)(x^2 - 5x)$

pela regra do produto:

$$h' = 3(x^2 - 5x) + (3x+2).(2x-5)$$
$$h' = 3x^2 - 15x + 6x^2 - 15x + 4x - 10$$
$$h' = 9x^2 - 26x - 10$$

ou

$$h(x) = (3x+2)(x^2-5x)$$
$$h(x) = 3x^3 - 15x^2 + 2x^2 - 10x$$
$$h(x) = 3x^3 - 13x^2 - 10x$$
$$h'(x) = 9x^2 - 26x - 10$$

6. **Derivada do quociente.** Seja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Se existem $f'(x)$ e $g'(x)$ então a derivado do quociente será $h'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemplo 3.9 Encontrar a derivada da função $y = \frac{3x+2}{x^2-1}$.

$3x+2 \to u$, $x^2-1 \to v$

$$y' = \frac{3(x^2-1) - (3x+2).2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2 - 3 - 6x^2 - 4x}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 4x - 3}{(x^2-1)^2}$$

ou

$$y = \frac{3x+2}{x^2-1}$$

$u = 3x+2 \to u' = 3$

$v = x^2 - 1 \to v' = 2x$

$$y = \frac{u}{v} \to y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3.(x^2-1) - (3x+2).(2x)}{(x^2-1)^2}$$

Exemplo 3.10 Encontrar a derivada da função $y = \frac{1}{x}$.

$$y = \frac{u}{v} \to y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pela regra do quociente:

$$y' = \frac{\cancel{0.x} - 1.1}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

ou

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$

$$y' = -1x^{-2} \to y' = \frac{-1}{x^2}$$

$y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

Exemplo 3.11 Sendo $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

$$y = \frac{1}{x^n}$$

$$y' = \frac{1'.x^n - 1.(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0.\cancel{x^n} - 1.nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$y = \frac{1}{x^n}$$

$$y' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot \cancel{x^n} - 1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$y' = -n x^{n-1} \cdot x^{-2n} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

$$\therefore y' = -n \cdot x^{-n-1}$$

7. **Derivada da função exponencial.** Seja $y = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = a^x \ln(a)$.

$$\ln = \log_e$$

Exemplo: *Encontre a derivada da função* $y = 5^x$

$$y' = 5^x \cdot \ln(5)$$

Exemplo: *Encontre a derivada da função* $y = e^x$

$$y' = e^x \cdot \cancel{\ln(e)}^{1}$$

$$y' = e^x$$

8. **Derivada da função logarítmica.** Seja $y = \log_a(x)$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $y' = \dfrac{1}{x \ln(a)}$.

Exemplo: *Encontre a derivada da função* $y = \ln(x)$ $= \log_e(x)$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \cancel{\ln e}_{1}} \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

9. **Derivadas de algumas funções trigonométricas.**

a. Se $y = \text{sen}(x)$ então $y' = \cos(x)$.

b. Se $y = \cos(x)$ então $y' = -\text{sen}(x)$.

$$\frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Exemplo:

c. Se $y = \text{tg}(x)$ então $y' = \sec^2(x)$.

$$y = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\, x\,(-\text{sen}\, x)}{(\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \left[\frac{1}{\cos x}\right]^2 = \sec^2 x$$

De modo análogo para outras funções trigonométricas.

Exemplo 3.12 Encontrar as derivadas das funções $f(x) = \sec(x)$ e $g(x) = \text{cossec}(x)$.