PQI 5776 – Fenômenos de Transporte I

AULA -06

COEFICIENTES CONVECTIVOS INDIVIDUAIS E GLOBAIS. CORRELAÇÕES PARA COEFICIENTES DE TRANSPORTE.

Coeficientes de Transporte: f (quantidade de movimento), h (calor), k(massa).

Considerando-se a equação:

$$\rho\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}\varphi) = -\mathrm{div}\vec{j}_{\emptyset} + \dot{\sigma}_{\forall\emptyset} \qquad \text{(eq 1)}$$

e aplicando-se para o transporte de massa:

$$\rho\frac{Dw_A}{Dt} = \frac{\partial\rho w_A}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}w_A) = -\mathrm{div}(\vec{j}_A) + r_A \qquad \text{(eq 2)}$$

em que os termos:

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}w_A) = \mathrm{div}(\rho_A\vec{v}) \qquad \text{(eq 3)}$$

representa a parcela devida ao transporte convectivo e

$$\mathrm{div}(\vec{j}_A) \qquad \text{(eq 4)}$$

representa a parcela devido ao termo difusivo, rearranjando-se esses termos na eq 2:

$$\rho\frac{Dw_A}{Dt} = \frac{\partial\rho w_A}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\vec{v}w_A) - \mathrm{div}(\vec{j}_A) + r_A \qquad \text{(eq 5)}$$

ou

$$\frac{\partial\rho w_A}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\vec{v}w_A + \vec{j}_A) + r_A \qquad \text{(eq 6)}$$

O termo $\rho\vec{v}w_A + \vec{j}_A$ representa o fluxo total (convecção + difusão) para a espécie A. e pode-se escrever que:

$$\vec{n}_A = \rho\vec{v}w_A + \vec{j}_A \qquad \text{(eq 7)}$$

O fluxo total pode ser representado por uma expressão do tipo:

$$\vec{n}_A = k_\rho \Delta w_A \qquad \text{(eq 8)}$$

Em que o termo k_ρ é o coeficiente de transferência de massa e Δw_A é a força motriz do transporte. Dessa forma, com as eq 7 e 8, o coeficiente de transferência de massa está associado tanto ao transporte convectivo quanto ao transporte difusivo.

O COEFICIENTE h PARA O TRANSPORTE DE CALOR:

Genericamente pode-se escrever que:

$$Q = hA\Delta T \quad \text{(eq 9)}$$

Q é a taxa de calor transferida;
A é a área característica;
ΔT é a diferença de temperatura característica;
h é o coeficiente de transferência de calor.

Que é uma equação válida para um fluido escoando num conduto ou ao redor de um corpo submerso e onde se tenha diferença de temperatura entre o fluido e o conduto ou corpo. Para um tubo circular com diâmetro D no qual há uma seção onde a parede esteja aquecida num comprimento L, variando a temperatura To(z) da parede de To1 a To2 e que o fluido experimenta uma variação de temperatura de Tb1 a Tb2 ao longo da seção aquecida, a taxa de calor transferida pode ser dada por:

$$Q = h_1(\pi DL)(T_{01} - T_{b1}) \quad \text{(eq 10)}$$

$$Q = h_a(\pi DL)\frac{(T_{01} - T_{b1}) + (T_{02} - T_{b2})}{2} \quad \text{(eq 11)}$$

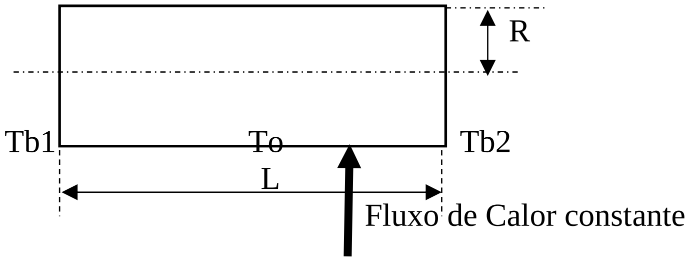
$$Q = h_{ln}(\pi DL)\frac{(T_{01} - T_{b1}) - (T_{02} - T_{b2})}{\ln[(T_{01} - T_{b1})/(T_{02} - T_{b2})]} \quad \text{(eq 12)}$$

h_1 é o coeficiente de troca térmica local com base na diferença de temperatura de admissão do fluido.
h_a é o coeficiente de troca térmica com base na média aritmética das diferenças de temperatura terminais.
h_{ln} é o coeficiente com base na diferença de temperatura média logarítmica que é a mais utilizada em engenharia pelo fato de os perfis não serem paralelos.
As três expressões devem fornecer a mesma taxa de calor Q.

Para o coeficiente de troca térmica local, por exemplo, é possível escrever a eq 10 como sendo:

$$dQ = h_1(\pi Ddz)(T_0 - T_b) \quad \text{(eq 13)}$$

Para um tubo com diâmetro D, comprimento L, temperatura da parede uniforme igual a To e fluido entrando com temperatura média T_{b1} e saindo com temperatura média T_{b2}:



O fluxo térmico instantâneo da parede da tubulação para o fluido será:

$$Q = \iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} R d\theta dz \qquad \text{(eq 14)}$$

Considerando-se o coeficiente de troca térmica h_1 na admissão:

$$Q = h_1(\pi DL)(T_0 - T_{b1}) \qquad \text{(eq 15)}$$

As eq´s 14 e 15 devem fornecer o mesmo valor para Q. assim:

$$h_1(\pi DL)(T_0 - T_{b1}) = \iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(k\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} R d\theta dz \qquad \text{(eq 16)}$$

Introduzindo-se os adimensionais:

$$\breve{r} = \frac{r}{D}$$

$$\breve{z} = \frac{z}{D}$$

$$\breve{T} = \frac{T - T_0}{T_{b1} - T_0}$$

Rearranjando-se a eq 16:

$$\frac{h_1 D}{k}(T_0 - T_{b1}) = \frac{1}{\pi L}\iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \frac{D}{2} d\theta dz \qquad \text{(eq 17)}$$

Como T_o e T_{b1} são constantes, podem entrar na derivada, e multiplicando-se e dividindo-se por D:

$$\frac{h_1 D}{k} = \frac{1}{\pi L}\iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(\frac{\partial (T - T_0)/(T_0 - T_{b1})}{\partial r}\right)_{r=R} \frac{D}{2} d\theta dz \quad x\frac{D}{D} \qquad \text{(eq 18)}$$

$$\frac{h_1 D}{k} = \frac{D}{2\pi L}\iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{T}}{\partial (r/D)}\right)_{r=R} d\theta d\left(\frac{z}{D}\right) \qquad \text{(eq 19)}$$

$$\frac{h_1 D}{k} = \frac{1}{2\pi (L/D)}\iint_{0,0}^{L/d,2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{T}}{\partial \breve{r}}\right)_{r=R} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 20)}$$

O termo $\frac{h_1 D}{k}$ é o número de Nusselt:

$$Nu_1 = \frac{1}{2\pi (L/D)}\iint_{0,0}^{L/d,2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{T}}{\partial \breve{r}}\right)_{r=R} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 21)}$$

Assim, Nu_1 é um gradiente de temperatura adimensional na média sobre a superfície de troca térmica.
Há várias expressões possíveis para se expressar Nu que pode ser expresso em função de outros adimensionais como Re, Pr, Br, L/d. Assim como obtido para Nu_1, é possível obterem-se expressões para Nu_a e Nu_{ln}.

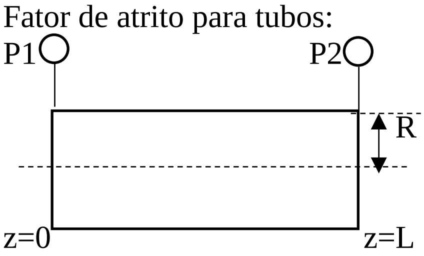
O FATOR DE ATRITO f PARA O TRANSORTE DFE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Considerando-se que se tem um fluido escoando numa tubulação reta de seção transversal uniforme ou em torno de um objeto submerso que possui um eixo de simetria (ou dois planos de simetria) paralelo à direção de aproximação do fluido, tem-se que haverá uma força que será exercida pelo fluido sobre a superfície sólida. Tal força pode ser considerada como tendo duas componentes:
F_s – exercida pelo fluido mesmo quando este está em repouso;
F_k – associada ao movimento do fluido.
Para tubulações, F_k tem a mesma direção da velocidade média v_b. Para objetos submersos, F_k tem a mesma direção que a da velocidade de aproximação v_∞.
Para os dois sistemas, F_k é proporcional à área característica A e a uma energia cinética característica K por unidade de volume. Desta forma:

$$F_k=AKf \qquad \text{(eq 22)}$$

Em que f é denominado fator de atrito. Tal expressão não é uma lei de dinâmica dos fluidos, mas uma definição para f.

Fator de atrito para tubos:



Tendo-se a eq 22:

$$F_k=AKf \qquad \text{(eq 22)}$$

Normalmente, A representa a superfície molhada, ou seja:

$$A = 2\pi RL \qquad \text{(eq 23)}$$

A energia cinética por unidade de volume é considerada como:

$$K = \frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2 \qquad \text{(eq 24)}$$

Assim:

$$\mathrm{F_k} = (2\pi\mathrm{RL})\left(\frac{1}{2}\rho\langle \mathrm{v}\rangle^2\right)\mathrm{f} \qquad \text{(eq 25)}$$

Pela “Lei” de Newton da viscosidade, para um sistema em coordenadas cilíndricas:

$$\tau_{\mathrm{rz}} = -\mu\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right] \qquad \text{(eq 26)}$$

Como a velocidade só varia com r:

$$\tau_{\mathrm{rz}} = -\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right] \qquad \text{(eq 26)}$$

A força que o fluido faz na parede do tubo será:

$$\tau_{\mathrm{rz}}\mathrm{Rd\theta dz} = -\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r=R}}\mathrm{Rd\theta dz} \qquad \text{(eq 27)}$$

Ou, na superfície inteira do tubo:

$$\iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\tau_{\mathrm{rz}}\mathrm{Rd\theta dz} = \iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\left\{-\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r=R}}\mathrm{Rd\theta dz}\right\} \qquad \text{(eq 28)}$$

O termo:

$$\iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\tau_{\mathrm{rz}}\mathrm{Rd\theta dz} = \mathrm{F_k} \qquad \text{(eq 29)}$$

E:

$$F_k = \iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\left\{-\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r=R}}\mathrm{Rd\theta dz}\right\} \qquad \text{(eq 30)}$$

Como $\mathrm{F_k}$ já havia sido definida pela eq 25:

$$(2\pi\mathrm{RL})\left(\frac{1}{2}\rho\langle \mathrm{v}_z\rangle^2\right)\mathrm{f} = \iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\left\{-\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r=R}}\mathrm{Rd\theta dz}\right\} \qquad \text{(eq 31)}$$

Da eq 31, pode-se expressar o fator de atrito f:

$$\mathrm{f} = \frac{\iint_{0,0}^{\mathrm{L},2\pi}\left\{-\mu\left[\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}\right]_{\mathrm{r=R}}\mathrm{Rd\theta dz}\right\}}{(2\pi\mathrm{RL})\left(\frac{1}{2}\rho\langle \mathrm{v}_z\rangle^2\right)} \qquad \text{(eq 32)}$$

Utilizando-se os adimensionais:

$$\breve{r} = \frac{r}{D}$$

$$\breve{z} = \frac{z}{D}$$
$$\breve{v}_z = \frac{v_z}{\langle v_z \rangle}$$

Multiplicando-se e dividindo-se a eq 32 por $\langle v_z \rangle / \langle v_z \rangle$ e D/D:

Obtém-se a seguinte equação adimensionalizada:

$$f = \frac{\mu}{\rho \langle v_z \rangle} \frac{1}{\pi} \frac{1}{L} \iint_{0,0}^{\frac{L}{D},2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{v}_z}{\partial \breve{r}} \right)_{\breve{r}=1/2} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 33)}$$

multiplicando-se e dividindo-se a eq 33 por D/D:

$$f = \frac{\mu}{D\rho \langle v_z \rangle} \frac{1}{\pi} \frac{D}{L} \iint_{0,0}^{\frac{L}{D},2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{v}_z}{\partial \breve{r}} \right)_{\breve{r}=1/2} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 34)}$$

que resulta em:

$$f = \frac{1}{Re} \frac{1}{\pi} \frac{1}{L/D} \iint_{0,0}^{\frac{L}{D},2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{v}_z}{\partial \breve{r}} \right)_{\breve{r}=1/2} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 35)}$$

A equação 35 mostra a dependência do fator de atrito com o número de Reynolds e de L/D. se o escoamento está completamente desenvolvido, a dependência do fator de atrito é apenas com Re.
Como exemplo para aplicação da eq 35 obtida, considere-se o escoamento laminar com o perfil de velocidades dado por:

$$v_z = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = v_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \qquad \text{(eq 36)}$$

Como $v_{max} = 2\langle v_z \rangle$

$$v_z = 2\langle v_z \rangle \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \qquad \text{(eq 37)}$$

Adimensionalizando-se a eq 37:

$$\frac{v_z}{\langle v_z \rangle} = 2 \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] \qquad \text{(eq 38)}$$

Ou:

$$\breve{v}_z = 2[1 - 4\breve{r}^2] \qquad \text{(eq 39)}$$

Assim:

$$\frac{\partial \breve{v}_z}{\partial \breve{r}} = -16\breve{r} \qquad \text{(eq 40)}$$

Substituindo-se a eq 40 na eq 35:

$$f = \frac{1}{Re}\frac{1}{\pi}\frac{1}{L/D}\iint_{0,0}^{\frac{L}{D},2\pi}(16\breve{r})_{\breve{r}=1/2}\,d\theta\, d\breve{z} \qquad (eq\ 41)$$

Chega-se a:

$$f = \frac{16}{Re} \qquad (eq\ 42)$$

Que é a equação clássica para o fator de atrito de Fanning para regime laminar.
Há várias equações possíveis para representar o fator de atrito, encontradas na literatura.
A representação clássica é o diagrama de Moody:

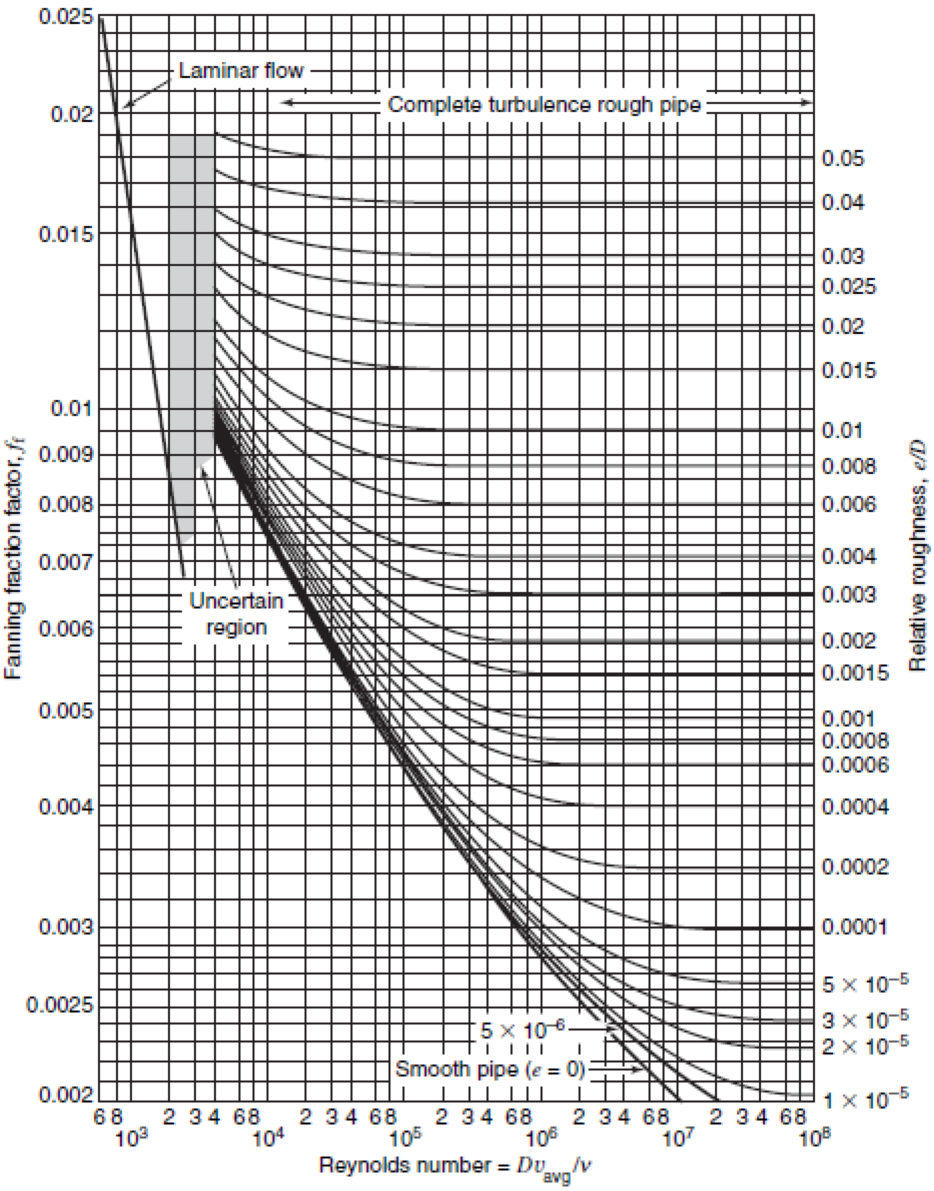


Figura 1. Fator de atrito de Fanning versus número de Reynolds e rugosidade relativa.

Referência: WELTY, J. R. et al. Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. 5ª edição, Fig. 13.1, pg. 173, John Wiley and Sons, 2008, adaptado.

O COEFICIENTE k PARA O TRANSPORTE DE MASSA:

Considerando-se a situação de sistema binário para esta discussão, tem-se:

$$N_{Ao} - x_{Ao}(N_{Ao} + N_{Bo}) = k_{x,loc}(x_{Ao} - x_b) \qquad \text{(eq 43)}$$

É comum encontrar-se a seguinte relação:

$$N_{Ao} = k^0{}_{x,loc}(x_{Ao} - x_b) \qquad \text{(eq 44)}$$

Expressando-se $(x_{Ao} - x_b)$ das duas equações e igualando-se as equações obtidas, chega-se a:

$$k^0_{x,loc} = k_{x,loc}\frac{1}{1 - x_{A0}(1 - r)} \qquad \text{(eq 45)}$$

Com $r = N_{B0}/N_{A0}$.
Dependendo da força motriz utilizada, ter-se-ão diferentes coeficientes de transporte de massa para se considerar:

-para força motriz expressa em fração molar:

$$N_{A0} = k^0_{C,loc}\Delta C_A \qquad \text{(eq 46)}$$

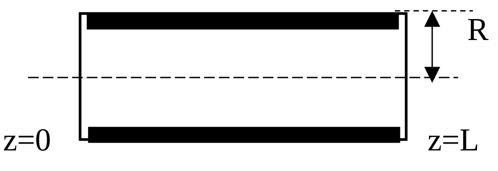
-para força motriz expressa em concentração mássica:

$$N_{A0} = k^0_{\rho,loc}\Delta \rho_A \qquad \text{(eq 47)}$$

-para a força motriz expressa em pressões parciais:

$$N_{A0} = k^0_{p,loc}\Delta p_A \qquad \text{(eq 48)}$$

As equações 46 e 47 são usuais para líquidos e no caso de gases, é usual a equação 48.
Para se obter uma expressão para o coeficiente k, procede-se de maneira semelhante ao feito anteriormente para h e f.
Para um tubo de seção circular:



as paredes da tubulação contêm uma solução sólida de A e B. na parede que contém essa solução, a concentração de A é mantida constante em x_{Ao} entre z=0 e z=L. a dissolução de A e B é lenta e mantém a concentração interfacial constante. A densidade, a viscosidade e a difusividade serão consideradas constantes.
Sabe-se do transporte de massa que:

$$N_{Ao} - x_{Ao}(N_{Ao} + N_{Bo}) = \iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(CD_{AB}\frac{\partial x_A}{\partial r}\right)_{r=R} Rd\theta dz \qquad \text{(eq 50)}$$

Como:

$$N_{Ao} - x_{Ao}(N_{Ao} + N_{Bo}) = k_1(\pi DL)(x_{Ao} - x_{A1}) \qquad \text{(eq 51)}$$

Das eqs 50 e 51 obtém-se:

$$k_1 = \frac{1}{(\pi DL)(x_{Ao} - x_{A1})} \iint_{0,0}^{L,2\pi} \left(CD_{AB}\frac{\partial x_A}{\partial r}\right)_{r=R} Rd\theta dz \qquad \text{(eq 52)}$$

E empregando-se os adimensionais:

$$\breve{r} = \frac{r}{D}$$
$$\breve{z} = \frac{z}{D}$$
$$\breve{x}_A = \frac{x_A - x_{Ao}}{x_{A1} - x_{Ao}}$$

Obtém-se:

$$Sh_1 = \frac{k_1 D}{D_{AB}} \frac{1}{2\pi(\frac{L}{D})} \iint_{0,0}^{\frac{L}{D},2\pi} \left(-\frac{\partial \breve{x}_A}{\partial \breve{r}}\right)_{\breve{r}=1/2} d\theta d\breve{z} \qquad \text{(eq 53)}$$

Que é semelhante às equações já obtidas para os outros coeficientes, sendo neste caso, obtido o adimensional Sh_1 que é o número de Sherwood.

Analogia entre os coeficientes de atrito, transferência de calor e transferência de massa.

Considerando um fluido sobre uma placa plana de comprimento L, com condições de corrente livre iguais a T_∞, v_∞ e $w_{A\infty}$, as condições de atrito, transferência de calor e massa podem ser expressas como:

ATRITO NA PAREDE: $\tau_S = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{f}{2}\rho v_\infty^2$ (eq 54)

TRANSFERÊNCIA DE CALOR: $q_S = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = h(T_S - T_\infty)$ (eq 55)

TRANSFERÊNCIA DE MASSA: $j_{A,S} = -D_{AB}\left(\frac{\partial w_A}{\partial y}\right)_{y=0} = k\left(w_{A,S} - w_{A\infty}\right)$ (eq 56)

Se for feita a adimensionalização de cada uma dessas equações:

Para a eq 54:

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{f}{2}\rho v_\infty^2$$

$$\left(\frac{\partial(v/v_\infty)}{\partial(y/L_c)}\right)_{y=0} = \frac{f}{2}\frac{\rho v_\infty L_c}{\mu} = \frac{f}{2}Re \qquad \text{(eq 57)}$$

Para a eq 55:

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = h(T_S - T_\infty)$$

$$-k\left(\frac{\partial(T - T_S)}{\partial\,(y/L_c)}\right)_{y=0} = L_c h(T_S - T_\infty)$$

$$\left(\frac{\partial\,(T_S - T)/(T_S - T_\infty)}{\partial(y/L_c)}\right)_{y=0} = \frac{hL_c}{k} = Nu \qquad \text{(eq 58)}$$

Para a eq 56:

$$-D_{AB}\left(\frac{\partial\left(w_A - w_{A,S}\right)}{\partial(y/L_c)}\right)_{y=0} = L_c k_m\left(w_{A,S} - w_{A\infty}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\left(w_{A,S} - w_A\right)/\left(w_{A,S} - w_{A\infty}\right)}{\partial(y/L_c)}\right)_{y=0} = \frac{L_c k_m}{D_{AB}} = Sh$$