Lista 3 – Álgebra Linear (LOB 1037) – Profa. Paula

1. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores do EV real $V = \mathbb{R}^2$. Mostre que as operações abaixo definem um produto interno em $\mathbb{R}^2$:

    a. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$
    b. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

2. Considere o seguinte produto interno no EV real $V = P_2(x)$: $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, em que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Dados $p_1 = 3 - 2x + x^2$, $p_2 = 4 - 3x$ e $p_3 = 1 - x^2$, calcule:

    a. $\langle p_1, p_2 \rangle$
    b. $\|p_1\|$ e $\|p_3\|$
    c. $\|p_1 + p_2\|$
    d. $\frac{p_2}{\|p_2\|}$

3. Se $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ são matrizes do EV real $V = M(2,2)$, a seguinte expressão define um produto interno nesse V: $\langle M_1, M_2 \rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$. Dados: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

    a. $\langle M_1, M_2 \rangle$
    b. $\|M_1\|$ e $\|M_2\|$
    c. $\|M_1 + M_2\|$
    d. $\frac{M_1}{\|M_1\|}$ e $\frac{M_2}{\|M_2\|}$

4. No EV real $V = P_2(x)$, considere o seguinte produto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$. Para $p(x) = -2x + x^2$ e $q(x) = 3 + x$, calcule:

    a. $\langle p, q \rangle$
    b. $\|p(x)\|$ e $\|q(x)\|$
    c. $\|p + q\|$
    d. $\frac{p}{\|p\|}$ e $\frac{q}{\|q\|}$

5. Sejam $\vec{u} = (1,1,-2)$ e $\vec{v} = (\alpha, -1, 2)$. Para quais valores de α, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$?

6. Seja V um EV real com produto interno. Mostre que, se $\vec{u}, \vec{v} \in V$ são ortogonais, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

7. Seja o conjunto $B = \{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2)\}$.

   a. Mostre que o conjunto B é ortogonal em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^3$. Esse conjunto é base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.
   b. Obtenha um conjunto ortonormal de vetores, C, a partir dos vetores de B.
   c. Escreva o vetor $\vec{u} = (1,2,0)$ como combinação linear dos vetores de B. Utilize o conceito de projeção ortogonal.
   d. Escreva o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ como combinação linear dos vetores de B. Utilize o conceito de projeção ortogonal.

8. Considere o EV $V = \mathcal{C}([-1,1])$ das funções contínuas em $\mathbb{R}$ no intervalo $[-1,1]$, com o produto interno definido como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

   a. Mostre que o conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ não é ortogonal.
   b. Mostre que $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ são ortogonais. Verifique a validade do Teorema de Pitágoras para essas funções.
   c. Calcule a projeção de x^5 em x. Faça um esboço dos gráficos de x^5 e $\operatorname{proj}_x x^5$, no mesmo sistema de coordenadas.

9. Seja o subconjunto $B = \left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ do EV $V = \mathcal{C}([-1,1])$ das funções contínuas em $\mathbb{R}$ no intervalo $[-1,1]$.

   a. Mostre que o conjunto B é ortogonal em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

   b. Obtenha um conjunto ortonormal de funções, C, a partir do conjunto B.
   c. Escreva o polinômio $q = 1 + x + x^2$ como combinação linear dos elementos de B.
   d. Escreva o polinômio $p = \alpha + \beta x + \delta x^2$ como combinação linear dos elementos de B.

10. Mostre que se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle, \forall\, \vec{u} \in V$, então $\vec{v} = \vec{w}$.

11. Mostre que se $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$, então $\vec{v}$ é ortogonal a qualquer combinação linear de $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$.

12. Mostre que o conjunto de todos os vetores de EV real V com produto interno ortogonais a um dado vetor $\vec{v}, \{\vec{u} \in V;\ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0\}$ é um subespaço de V.

13. A partir do vetor $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, construa uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

14. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal do $\mathbb{R}^4$, a partir da base $\{(1,1,-1,0),(0,2,0,1),(-1,0,0,1),(1,2,3,4)\}$.

15. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$, a partir da base $\{(1,1,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$.

16. Considere o conjunto $S = \{(3,0,1),(7,0,-1),(5,0,-5)\}$.

    a. Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto S, obtendo assim um conjunto S'.
    b. O conjunto S' é ortogonal? Justifique.
    c. S' é uma base do $\mathbb{R}^3$? Justifique.

17. Considere as retas $r: (x,y,z) = t(1,2,-3), t \in \mathbb{R}$ e $s: (x,y,z) = (0,1,2) + t(2,4,-6)$, $t \in \mathbb{R}$. Encontre a equação geral do plano π que contém as duas retas e uma base ortonormal para esse plano. Complete essa base a uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

18. Seja $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ uma base ortonormal de um subespaço S de um EV real com produto interno V. Mostre que $\|\vec{v}\|^2 \geq \sum_{j=0}^{m} \left|\langle \vec{v}, \vec{u}_j \rangle\right|^2, \forall\, \vec{v} \in V$ (Desigualdade de Bessel).

RESPOSTAS

2) a) 18.

b) $\|p_1\| = \sqrt{14}$; $\|p_3\| = \sqrt{2}$.

c) $5\sqrt{3}$.

d) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$

3) a) 4.

b) $\|M_1\| = \sqrt{7}$; $\|M_2\| = \sqrt{6}$.

c) $\sqrt{21}$.

d) $\frac{M_1}{\|M_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\frac{M_2}{\|M_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4) a) $-\frac{29}{12}$.

b) $\|p\| = \frac{2\sqrt{30}}{15}$; $\|q\| = \frac{\sqrt{111}}{3}$.

c) $-\frac{\sqrt{30}}{2}x + \frac{\sqrt{30}}{4}x^2$.

d) $\frac{9\sqrt{111}}{111} + \frac{3\sqrt{111}}{111}x$.

5) $a = 5$.

7) a) É base.

b) $C = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$.

c) $\vec{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{b_1} + \frac{5}{4}\overrightarrow{b_2} - \frac{3}{4}\overrightarrow{b_3}$; $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\}$.

d) $\vec{v} = \left(\frac{x+y+z}{2}\right)\overrightarrow{b_1} + \left(\frac{-3x+y-z}{4}\right)\overrightarrow{b_2} + \left(\frac{-x-y+z}{4}\right)\overrightarrow{b_3}$.

8) $\text{proj}_x x^5 = \frac{3}{7}x$.

9) b) $C = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}x,\ -\frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{3\sqrt{10}}{4}x^2\right\}$.

c) $q = \frac{4}{3}p_1 + p_2 + p_3$; $B = \{p_1, p_2, p_3\}$.

d) $p = \left(\alpha + \frac{\delta}{3}\right)p_1 + (\beta)p_2 + (\delta)p_3$.

13) $B' = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1)\right\}$.

14) $B' = \left\{(1,1,-1,0), \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right), \left(-\frac{4}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right), \left(\frac{11}{5}, -\frac{11}{10}, \frac{11}{10}, \frac{11}{5}\right)\right\}$.

15) $B' = \left\{(1,1,1), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

16) a) $S' = \{(3,0,1), (1,0,-3), (0,0,0)\}$.

b) Sim.

c) Não. Conjunto LD.