

Questão 5 : Encontrar uma bijeção

$$f: \mathbb{N} \rightarrow I = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ é ímpar}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$f(n) = 2n - 1.$$

A dificuldade maior foi provar que f é sobrejetora

"Se $k \in I$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = k$."

↓
como encontrar m ?

Rascunho:

$$\begin{aligned} k &= 2n - 1 \\ \Leftrightarrow k + 1 &= 2n \\ \frac{k+1}{2} &= n \end{aligned}$$

Solução:

Seja $k \in I$.

Tomo

$$m_0 = \frac{k+1}{2}$$

Temos:

$$\begin{aligned} f(m_0) &= f\left(\frac{k+1}{2}\right) = 2\left(\frac{k+1}{2}\right) - 1 \\ &= (k+1) - 1 = k. \end{aligned}$$

Observe que como k é ímpar, $k+1$ é par e portanto $\frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$.

Sobre supremos de um conjunto A

Para justificar que $s = \sup A$

precisamos provar que s $\left\{ \begin{array}{l} \text{é majorante de } A \\ \text{é o menor majorante de } A. \end{array} \right.$

Situações que podem ocorrer:

(a) s é majorante e $s \in A$ ($\Rightarrow s$ é o máximo de A)
 $\Rightarrow s = \sup A$.

(b) s é majorante e tomo $c < s$ (com o objetivo de provar que c não pode ser majorante)

(i) Se $a = \frac{c+s}{2}$ pertence ao conjunto A então
tem-se $c < \frac{c+s}{2} \in A \Rightarrow c$ não é majorante - acabou.

(ii) se $\frac{c+s}{2}$ não pertence ao conjunto A , temos um quebra-cabeças maior para procurar $a \in A$ tal que $c < a$.

Em muitos casos, precisamos da

Propriedade Arquimediana para encontrar $m \in \mathbb{N}$ que satisfaz alguma desigualdade útil para o problema.

Sequências Reais

(2)

Exemplos

① $(a_n)_n$, $a_n = 2n$
 $(2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots)$

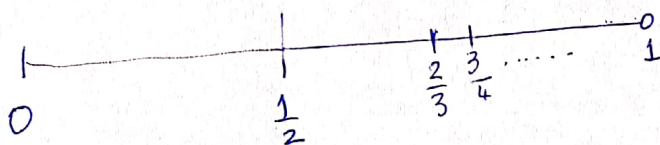
② $(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots)$

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

③ $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$

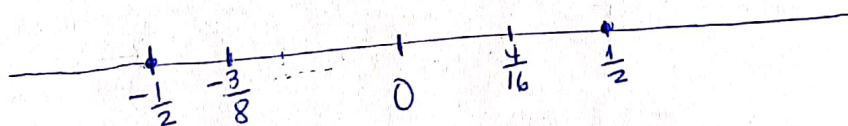
$$a_n = (-1)^{n+1}$$

④ $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots)$



⑤ $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{16}, -\frac{5}{32}, \dots)$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$$



A sequência do exemplo 2 é limitada

(3)

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots)$$

Vamos provar que

$$\underbrace{1}_{(i)} \leq a_n \leq \underbrace{2}_{(ii)}$$

$$(i) \ a_n = 1 + \frac{1}{n} \underset{>0}{\geq} 1$$

$$(ii) \ \begin{cases} \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1.$$

Uma sequência é decrescente se

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vamos provar que $(\frac{n+1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente:

Vamos provar que $a_n - a_{n+1} \geq 0$

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1 - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

Portanto $(a_n)_n$ é decrescente.

A seq. do exemplo 3 : $(1, -1, 1, -1, \dots)$ (4)

é limitada

$$a_n = (-1)^{n+1}, \quad \forall n$$

$$|a_n| \leq 1, \quad \forall n$$

$$-1 \leq a_n \leq 1$$

A seq. do exemplo 4 :

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right)$$

Uma seq. é crescente se

$$(a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots)$$

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos provar que $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ é crescente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - (n+2)n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - (n^2 + 2n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Logo, $a_{n+1} > a_n$ e a seq. é crescente.

$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)_n$ é uma seq. limitada.

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$

Uma seq. é monotona se for $\left\{ \begin{array}{l} \text{crescente} \\ \text{ou} \\ \text{decrecente} \end{array} \right.$

Sequência do exemplo 5 ; $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{2^4}, -\frac{5}{2^5}, \dots \right)$$

É limitada?

$$|a_n| = \frac{n}{2^n}$$

Vamos provar que $|a_n| < 1$, ou seja,

$$-1 \leq a_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O que garante que $(a_n)_n$ é limitada.

Para isso, provaremos, por indução, que $n < 2^n$; (*)

(a) Se $n=1$ temos $1 < 2^1$, que é verdadeiro.
Logo, (*) vale para $n=1$

(b) Suponha que $k < 2^k$ para algum k . (**)
Vamos provar que vale: $k+1 < 2^{k+1}$

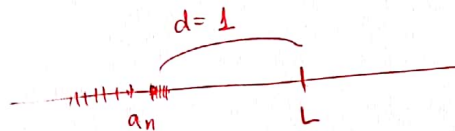
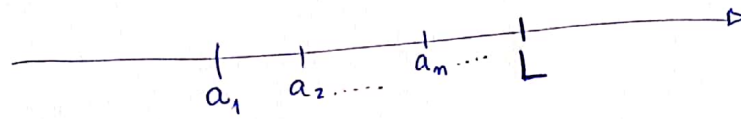
De fato,

$$k+1 \stackrel{(**)}{<} 2^k + 1 < \underbrace{2^k + 2^k}_{= 2 \cdot 2^k} = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Como valem (a) e (b), pelo Princípio de Indução Finita, podemos concluir que
 $n < 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6

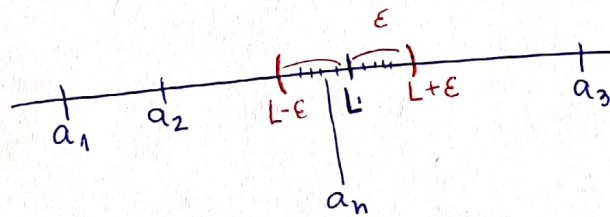
Def. Uma sequência $(a_n)_n$ é convergente se existir um número $L \in \mathbb{R}$ tal que



a_n tão perto de L quanto se queira

Para todo $\epsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$



Neste caso, dizemos que L é o limite da sequência:

Notações

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n$$

$$a_n \rightarrow L$$

Exemplo

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$(a_n)_n$ converge
para $L=1$

(7)

Rasunho

Vamos resolver a inequação

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{n - (n+1)}{n+1} \right| < \epsilon.$$

Note que

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Basta fazer $\frac{1}{n} < \epsilon$.

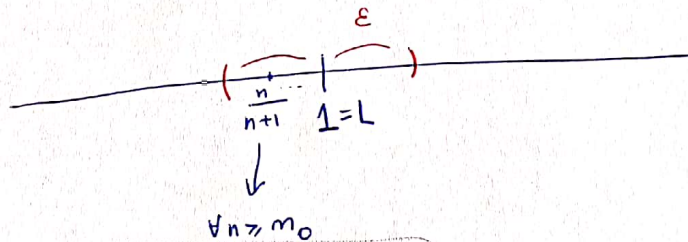
Solução. Seja $\epsilon > 0$ qualquer.

Pela prop. Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Para todo $n \geq n_0$, teremos:

$$|a_n - L| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$



Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$