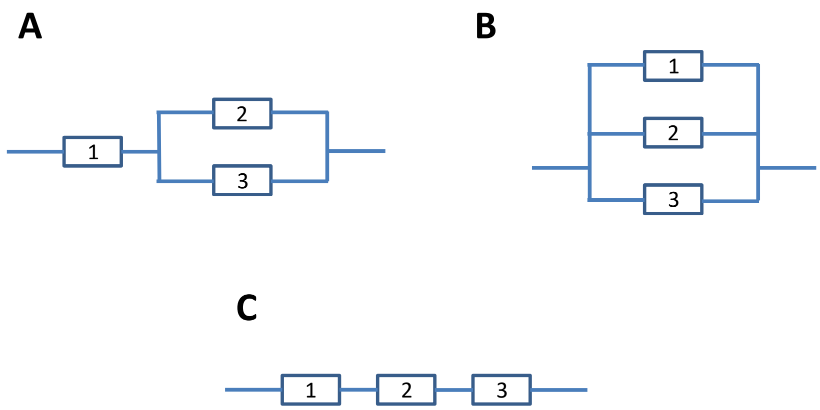
Lista 3. Distribuição Exponencial e suas Propriedades. (sexta 25/09/2020)



Exercício 1. Veja figura acima. Três sistemas estão representadas. Cada sistema A, B, C consiste em três componentes. Um sistema funciona, se existe a passagem de esquerda para direita. Cads componente $i, i = 1, 2, 3$, tem a sua vida útil T_i exponencialmente distribuída com respectiva taxa λ_i. Seja X_A, X_B, X_C tempos de funcionamento dos sistemas A, B e C respectivamente. Achar densidades de tempos de X_A, X_B, X_C.

Solução:

A. O tempo de funcionamento X_A pode ser representada de seguinte forma:

$$X_A = \min\left(T_1, \max\left(T_2, T_3\right)\right).$$

Seja $Z = \max\left(T_2, T_3\right)$:

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}(\max\left(T_2, T_3\right) \le x) = \mathbb{P}(T_2 \le x)\mathbb{P}(T_3 \le x) = \left(1 - e^{-\lambda_2 x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_3 x}\right) \\
&= 1 - e^{-\lambda_2 x} - e^{-\lambda_3 x} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x} \\
\overline{F}_{X_A}(t) &= \mathbb{P}(X_A > t) = \mathbb{P}(\min\left(T_1, Z\right) > t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(Z > t) = e^{-\lambda_1 t}\left(e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t}\right) \\
F_{X_A}(t) &= 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \\
f_{X_A}(t) &= (F_{X_A}(t))' = (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + (\lambda_1+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}
\end{aligned}$$

B. O tempo de funcionamento X_B pode ser representada de seguinte forma:

$$X_B = \max\left(T_1, T_2, T_3\right).$$

$$\begin{aligned}
F_{X_B}(t) &= \mathbb{P}(X_B \le t) = \mathbb{P}(\max\left(T_1, T_2, T_3\right) \le t) = \mathbb{P}(T_1 \le t)\mathbb{P}(T_2 \le t)\mathbb{P}(T_3 \le t) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_3 t}\right) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_3 t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \\
f_{X_B}(t) &= (F_{X_B}(t))' = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_3 e^{-\lambda_3 t} \\
&\quad - (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - (\lambda_1+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - (\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} \\
&\quad + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}
\end{aligned}$$

C. O tempo de funcionamento X_C pode ser representada de seguinte forma:

$$X_C = \min\left(T_1, T_2, T_3\right).$$

Pelo exercício na aula sabemos que $X_C \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, logo

$$f_{X_C}(t) = \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

□

Exercício 2. (Exercício 18, Ross) Sejam X, Y independentes exponenciais com taxas λ e μ respectivamente. Definimos variável I, independente de X e Y

$$I = \begin{cases} 1, \text{ com probabilidade } \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}; \\ 0, \text{ com probabilidade } \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}; \end{cases}$$

definimos variável Z

$$Z = \begin{cases} X, \text{ se } I = 1; \\ -Y, \text{ se } I = 0; \end{cases}$$

Achar densidade $f_Z(z)$ e função de distribuição cumulativa $F_Z(z)$.

Solução: É um caso de distribuição mistura, condicionando Z pelo variável I:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_Z(z \mid I=1)\mathbb{P}(I=1) + f_Z(z \mid I=0)\mathbb{P}(I=0) \\ &= f_X(z)\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + f_{-Y}(z)\frac{\mu}{\lambda+\mu} = \lambda e^{-\lambda z}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathbb{I}(z \geq 0) + \mu e^{\mu z}\frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathbb{I}(z < 0) \end{aligned}$$

Achamos a cumulativa

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(z)dz &= \begin{cases} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{z} \mu e^{\mu y} dy, \text{ se } z < 0; \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\displaystyle\int_{0}^{z} \lambda e^{-\lambda x} dx, \text{ se } z \geq 0; \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu z}, \text{ se } z < 0; \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-\lambda z}), \text{ se } z \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Exercício 3. Consideramos um correio com dois funcionários. Suponha que três pessoas A, B e C entram no correio. A e B foram as primeiras atendidas e C ficou esperando. Qual é a probabilidade de que A estará no correio quando B e C já foram embora se

1. o tempo de atendimento de cada funcionário é exatamente 10 minutos?
2. o tempo de atendimento é igual a i com a probabilidade $1/3$, $i = 1, 2, 3.$?
3. o tempo de atendimento é exponencial com média $1/\mu$?

Qual é a distribuição do tempo de espera da pessoa C se o tempo de atendimento dos funcionários do correio

1. são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição exponencial com média $1/\lambda$?
2. são independentes com as distribuições exponenciais com parâmetros λ_1 e λ_2 para os funcionários 1 e 2, respectivamente?

Solução:

1. Qual é a probabilidade de que A estará no correio quando B e C já foram embora se o tempo de atendimento de cada funcionário é exatamente 10 minutos?

   É óbvio que 0. A e B vão sair juntos e depois C vai ser atendido.
   □

2. Qual é a probabilidade de que A estará no correio quando B e C já foram embora o tempo de atendimento é igual a i com a probabilidade $1/3$, $i = 1, 2, 3.$?

Seja T_A, T_B, T_C os temos de atendimento de A, B e C respectivamente. A probabilidade desejada é

$$\mathbb{P}(T_A > T_B + T_C) = \mathbb{P}(T_A = 3, T_B = 1, T_C = 1) = \mathbb{P}(T_A = 3)\mathbb{P}(T_B = 1)\mathbb{P}(T_C = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

□

3. Qual é a probabilidade de que A estará no correio quando B e C já foram embora o tempo de atendimento é exponencial com média $1/\mu$?

A probabilidade desejada ocorre somente quando $T_A > T_B$, o que ocorre com probabilidade 0.5. Dentro deste evento precisamos $T_A > T_C$, o que pela falta de memória ocorre com a probabilidade 0.5, então a probabilidade que procuramos é igual 0.25.

□

1. Qual é a distribuição do tempo de espera da pessoa C se o tempo de atendimento dos funcionários do correio são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição exponencial com média $1/\lambda$?

Seja X_C tempo de espera de C. Logo

$$X_C = T_C + \min\{T_A, T_B\}$$

Já sabemos que $\min\{T_A, T_B\} \sim \exp(2\lambda)$ e soma de dois exponenciais independentes com taxas λ e 2λ tem distribuição hypo-exponencial com a densidade

$$f_{X_C}(t) = \frac{2\lambda}{2\lambda - \lambda}\lambda e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{2\lambda - \lambda}2\lambda e^{-2\lambda t} = 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

□

2. Qual é a distribuição do tempo de espera da pessoa C se o tempo de atendimento dos funcionários do correio são independentes com as distribuições exponenciais com parâmetros λ_1 e λ_2 para os funcionários 1 e 2, respectivamente?

De novo $X_C = T_C + \min\{T_A, T_B\}$, e sabemos que $\min\{T_A, T_B\} \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ e T_C tem distribuição exponencial com taxa λ_1 com a probabilidade $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ e tem distribuição exponencial com taxa λ_2 com a probabilidade $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Então a distribuição de X_C tem a distribuição da mistura de hypo-exponencial com a densidade

$$\begin{aligned}
f_{X_C}(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right) \\
&+ \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right) \\
&= \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}e^{-\lambda_1 t}\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right).
\end{aligned}$$

□

Exercício 4. X, Y tem distribuição exponencial com taxas λ, μ. Seja $Z = \max\{X, Y\}$. Achar densidade, função de distribuição cumulativa e esperança de v.a. Z.

Solução:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \le z) = \mathbb{P}(X \le z)\mathbb{P}(Y \le z) = (1 - e^{-\lambda z})(1 - e^{-\mu z}) \\
f_Z(z) &= (F_Z(z))' = \lambda e^{-\lambda z} + \mu e^{-\mu z} - (\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)z} \\
\mathbb{E}(Z) &= \int_0^\infty z\lambda e^{-\lambda z}dz + \int_0^\infty z\mu e^{-\mu z}dz - \int_0^\infty z(\lambda + \mu)e^{-(\lambda + \mu)z}dz = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda + \mu}.
\end{aligned}$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.