Lista 2. Distribuição Condicional Caso Contínuo. (sexta 18/09/2020)

Exercício 1. O tempo de vida X de uma lâmpada tem a distribuição exponencial com a taxa λ (assim, a média é $1/\lambda$). A taxa, ou a média, depende de processo de produção, que a população inteira pode ser caracterizada pela distribuição uniforme $U[0,1]$, $\lambda \sim U[0,1]$.

1. Descreve a densidade conjunta de tempo de vida X (da lâmpada) e taxa λ.
2. Achar a distribuição de X.

Solução:

1. Descreve a densidade conjunta de tempo de vida X (da lâmpada) e taxa λ.

A densidade condicional do tempo de vida dado a taxa é conhecido: $f_{X|\lambda}(t \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$ e 0 caso contrário. Seja $g(\lambda)$ densidade de distribuição (marginal) da taxa, logo

$$f(t,\lambda) = f_{X|\lambda}(t \mid \lambda) \cdot g(\lambda) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{\lambda \in (0,1)},\ t > 0.$$

2. Achar a distribuição de X.

Acharemos a distribuição cumulativa F_X. Lembrando que $\mathbb{P}(X \le t \mid \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$, logo

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_0^1 \mathbb{P}(X \le t \mid \lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_0^1 (1 - e^{-\lambda t}) d\lambda \\ &= 1 - \int_0^1 e^{-\lambda t} d\lambda = 1 - \int_0^1 d\left(-\frac{e^{-\lambda t}}{t}\right) = 1 - \frac{1 - e^{-t}}{t}, \quad t > 0 \\ f_X(t) &= (F_X(t))' = \frac{1}{t^2} - e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$f_X(t) = \int_0^1 f(t,\lambda) d\lambda = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} d\lambda = \frac{1}{t^2} - e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right), \quad t > 0.$$

□

Exercício 2. Distribuição conjunta de duas v.a. X, Y é dada pela seguinte densidade

$$f(x,y) = \frac{n 2 a^2 x^{n-1}}{y^{n+3}}, \quad x \in [0,y],\ y > a,$$

em que $a > 0, n \in \mathbb{N}$ são parâmetros fixos da distribuição. Achar a distribuição condicional de X dado $Y = y$, e $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$, e consequentemente, achar a média de X usando a fórmula iterativa da esperança.

Solução: Achamos a densidade condicional, para isso, primeiro, a densidade marginal do Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y \frac{n 2 a^2 x^{n-1}}{y^{n+3}} dx = \frac{2a^2}{y^{n+3}} \left(x^n\big|_0^y\right) = \frac{2a^2}{y^{n+3}} y^n = \frac{2a^2}{y^3} \\ f_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{\frac{n 2 a^2 x^{n-1}}{y^{n+3}}}{\frac{2a^2}{y^3}} = \frac{n x^{n-1}}{y^n}, \quad x \in (0,y),\ y > a \\ F(x) &= \frac{1}{y^n} \int_0^x n s^{n-1} ds = \frac{x^n}{y^n}, \end{aligned}$$

ou

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \ge y; \\ \frac{x^n}{y^n}, & \text{se } 0 \le x \ge y; \\ 0, & \text{se } x < y; \end{cases}$$

e logo

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \int_0^y x \frac{n x^{n-1}}{y^n} dx = \frac{n}{y^n} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^y\right) = \frac{ny}{n+1}, \quad y > a.$$

Achamos a esperança pela formula iterativa

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y = y)) = \int_a^\infty \frac{ny}{n+1} \frac{2a^2}{y^3} dy = \frac{2an}{n+1}.$$

□

Exercício 3. (X, Y) coordenadas de um ponto uniformemente distribuído em retângulo Q

$$Q = \{(x, y) : \ |x| \leq 1, |y| \leq 3\}.$$

1. Achar a densidade condicional de X dado $Y = y$.
2. X e Y são independentes?
3. Achar a densidade de $Z = X + Y$.

Solução: Observações elementares mostram que as variáveis são independentes, e densidade de soma de variáveis calcula-se pelas simples fórmulas obtendo a seguinte densidade:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t+4}{12}, \text{ se } t \in (-4, -2); \\ \frac{1}{6}, \text{ se } t \in (-2, 2); \\ \frac{t-4}{12}, \text{ se } t \in (2, 4); \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

□

Exercício 4. $X|p \sim \text{Geom}(p), i.e. \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \ k = 1, 2, \ldots$. Supomos que $p \sim U[0, 1]$. Achar a distribuição de X.

Solução: Para $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^1 \mathbb{P}(X = k \mid p) dp = \int_0^1 (1-p)^{k-1} p dp = \int_0^1 pd\left(-\frac{(1-p)^k}{k}\right)$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-p)^k}{k} dp = \left(\frac{(1-p)^{k+1}}{k(k+1)} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{k(k+1)}$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.