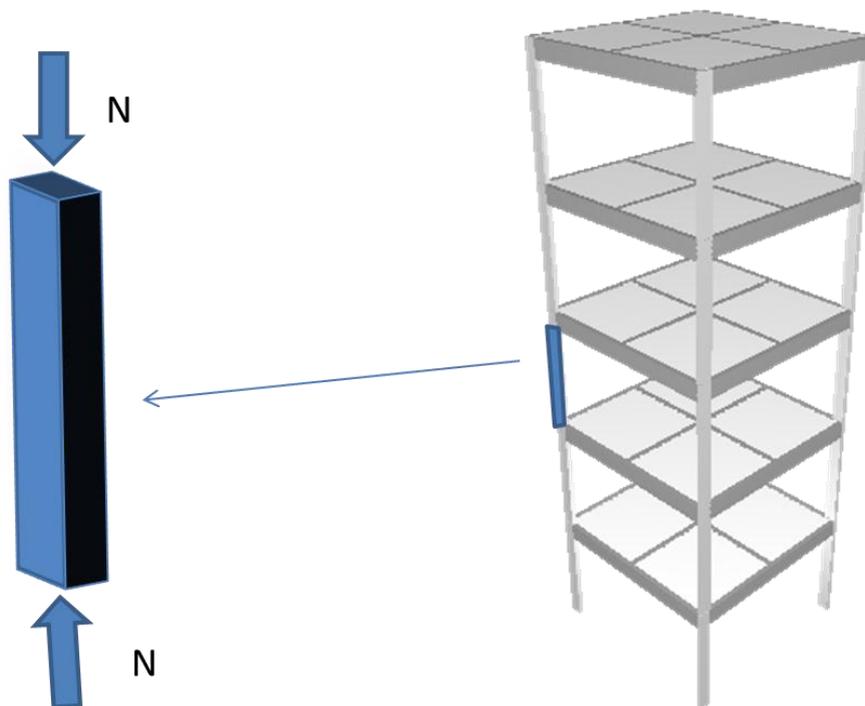


## Aula 07 – Pilares: dimensionamento e determinação de cargas nas fundações.

### 1. Introdução.

Pilares são barras retas, verticais, em que os esforços solicitantes predominantes são forças normais de compressão. Apesar do fato dessa definição enfatizar o esforço normal como predominante, no dimensionamento de pilares deverão ser considerados efeitos de flexão ( $M$ ,  $V$ ), sobretudo momentos fletores, que podem ter diversas origens e que, em geral, poderão ser tratados como excentricidade “ $e$ ” da força normal de compressão na seção transversal, sendo  $e=M/N$ .



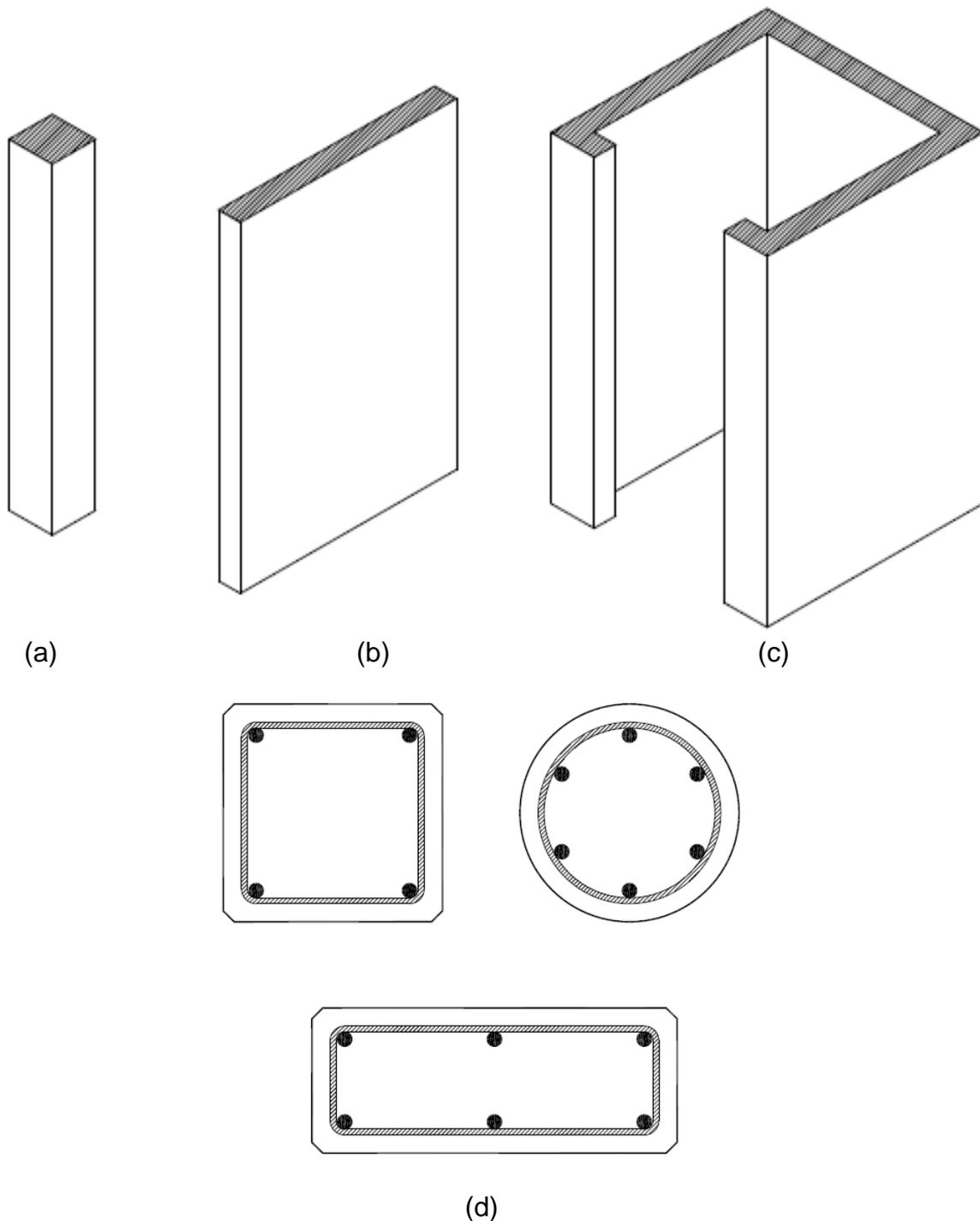
**Figura 1** – Diagrama de corpo livre do trecho de um pilar entre dois pavimentos de um edifício considerando-se apenas a força normal  $N$  – a flexão pode ser representada pela excentricidade da força normal  $e=M/N$  (GRAZIANO & SIQUEIRA, 2011).

Neste trabalho será abordado o dimensionamento de pilares de concreto, com ênfase em pilares de edifícios de múltiplos pavimentos. Dados os objetivos específicos da disciplina e a carga horária prevista para o assunto, o escopo deste trabalho apresentará as seguintes limitações:

- i) – Tratam-se apenas de seções retangulares;

Os pilares de concreto podem apresentar diversas formas de eixos e seção transversal, porém, a seção retangular é a mais comumente empregada. Quando um dos lados da seção é muito maior que o outro ( $b_w \geq 5h$ ) utiliza-se a denominação pilar-parede. Os pilares parede podem ser elementos de superfície plana ou casca cilíndrica. Podem ser compostos por uma ou mais

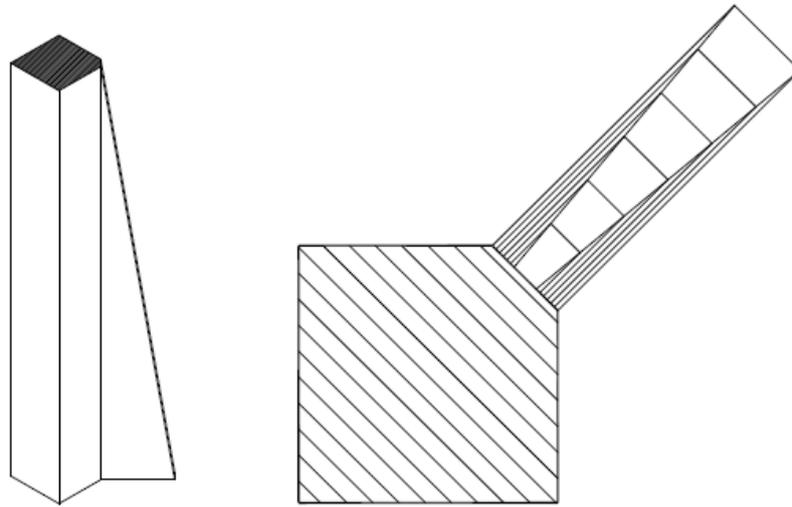
superfícies associadas (Figura 2). Seções circulares também são muito usadas para pilares, porém não serão tratadas neste texto.



**Figura 2** – Tipos de pilares de concreto: (a) pilar reticulado; (b) pilar-parede; (c) pilar-parede composto por várias superfícies associadas; (d) seções transversais usuais de pilares reticulados de concreto armado.

Algumas vezes a seção transversal do pilar pode ser variável e ter formas especiais, como é o caso mostrado na Figura 3.a., de um pilar do prédio da Engenharia Civil da EPUSP.

Na definição de pilar consta que o eixo é disposto na vertical. Essa direção é coincidente com os esforços de compressão gerados pelas cargas em estruturas de pórtico. Porém, em outras situações, para que o esforço predominante seja de compressão, faz-se necessário que o eixo não seja vertical, como é o caso do pilar treliçado apresentado na Figura 3.



(a)



(b)

**Figura 3** – Pilares especiais: (a) pilar com seção variável – prédio da EPUSP-Eng. Civil; (b) com eixo não vertical para apoio de arco de cobertura.

- ii) – Considera-se somente a flexão normal composta; a flexão oblíqua composta é tratada por procedimento simplificado;
- iii) – O índice de esbeltez ( $\lambda$ ) será limitado ao valor máximo de 90 a fim de utilizar-se expressão aproximada da curvatura no tratamento de excentricidades de segunda ordem, bem como poder desprezar a deformação lenta do concreto.

## 2. Flexão normal composta.

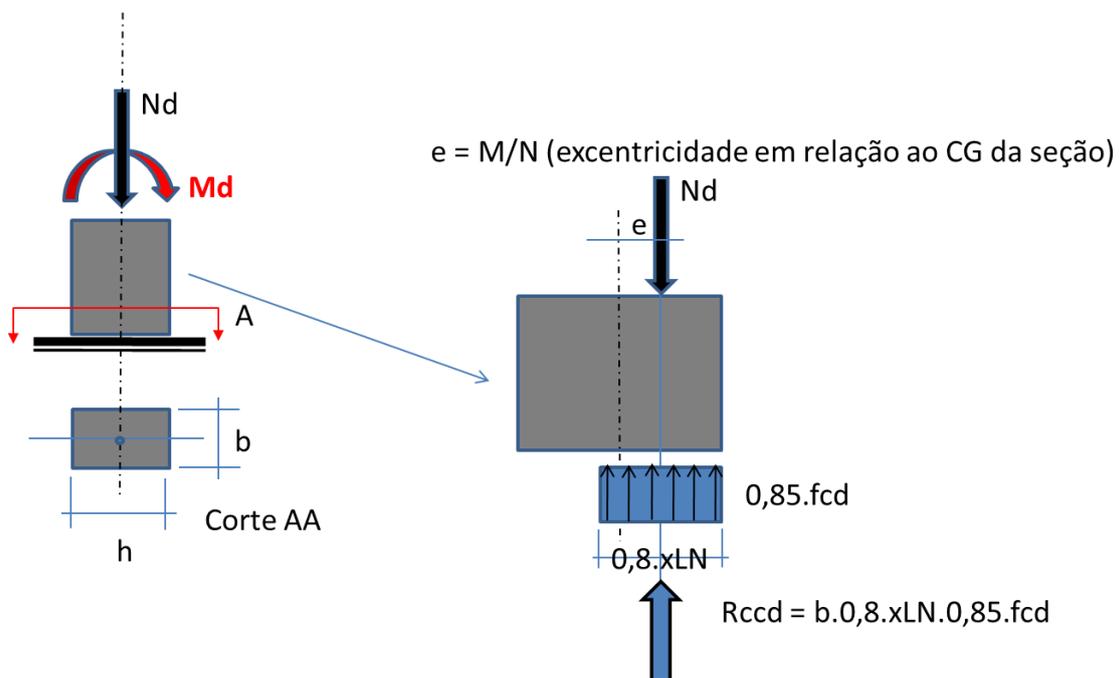
### 2.1. Seções de concreto simples.

Inicialmente, procura-se estudar a capacidade de uma dada seção retangular resistir à força normal excêntrica segundo um dos eixos principais. Será tratado o caso de flexão normal composta, iniciando-se por uma seção de concreto simples para fins de tornar a explicação mais didática – este procedimento segue a sugestão do Prof. Graziano e, na opinião deste autor, é uma maneira bastante interessante de abordar o assunto pois tem forte apelo à compreensão física do problema e permite que a matemática envolvida seja compreendida de forma natural.

O equilíbrio dos esforços na seção pode ser feito por meio de duas equações:

$$\sum F_X = 0 \leftrightarrow N_d - R_{ccd} = 0$$

$$\sum M_Z = 0 \leftrightarrow M_d - R_{ccd} \times e = 0$$



**Figura 4** – Definições para equacionamento de seção de concreto simples submetida à flexão normal composta (Graziano & Siqueira, 2011).

O valor da excentricidade pode ser escrito em função dos esforços internos, resultando em

$$e = \frac{h}{2} - 0,4 \times x_{LN}$$

Sabendo que  $R_{ccd}$  pode ser obtido com o diagrama retangular de tensões, no qual  $y=0,8x$ , é possível expressar  $M_d$  por:

$$M_d = (0,68 \times b \times f_{cd}) \times x_{LN} \times \left(\frac{h}{2} - 0,4 \times x_{LN}\right)$$

O valor de  $N_d$  também pode ser expresso em função de  $x_{LN}$ , resultando em:

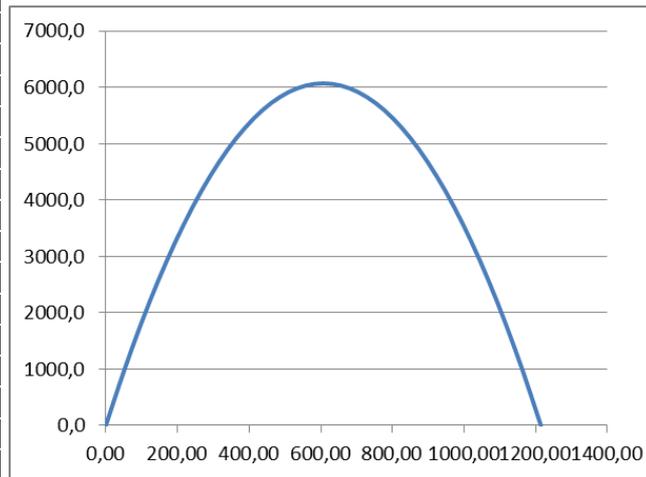
$$N_d = 0,68 \times b \times f_{cd} \times x_{LN}$$

Ou seja,  $M_d$  é expresso como função do segundo grau – no caso uma parábola – em relação à variável  $x_{LN}$ , enquanto  $N_d$  é expresso como função linear da mesma variável. Logo, para cada valor de  $x_{LN}$  obtém-se um par  $N_d, M_d$  correspondente. Esse par pode ser representado na forma de um gráfico, ilustrado na figura abaixo, chamado diagrama de interação.

**Exemplo numérico 1:** Determinar os pontos do diagrama de interação  $N_d, M_d$  para uma seção de concreto simples, 20cmx40cm, de concreto C-25.

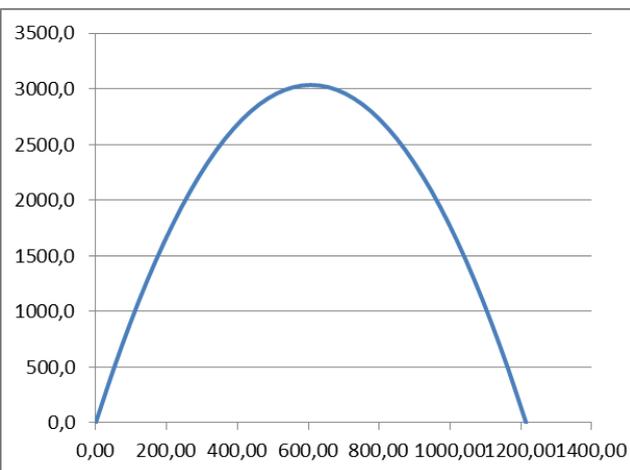
**Solução:** A partir das equações apresentadas anteriormente é feita uma planilha em que se calculam os valores de  $N_d$  e de  $M_d$  para cada posição da linha neutra assumida. Rigorosamente, haveria infinitas posições da linha neutra; no cálculo foram consideradas posições cada 1/20 da altura da seção. O gráfico resultante mostra uma curva suave o que indica que a variação considerada é adequada.

xLN (cm)	Nd (kN)	Md (kNxcn)
0	0,00	0,0
2,00	48,57	932,6
4,00	97,14	1787,4
6,00	145,71	2564,6
8,00	194,29	3264,0
10,00	242,86	3885,7
12,00	291,43	4429,7
14,00	340,00	4896,0
16,00	388,57	5284,6
18,00	437,14	5595,4
20,00	485,71	5828,6
22,00	534,29	5984,0
24,00	582,86	6061,7
26,00	631,43	6061,7
28,00	680,00	5984,0
30,00	728,57	5828,6
32,00	777,14	5595,4
34,00	825,71	5284,6
36,00	874,29	4896,0
38,00	922,86	4429,7
40,00	971,43	3885,7
42,00	1020,00	3264,0
44,00	1068,57	2564,6
46,00	1117,14	1787,4
48,00	1165,71	932,6
50,00	1214,29	0,0

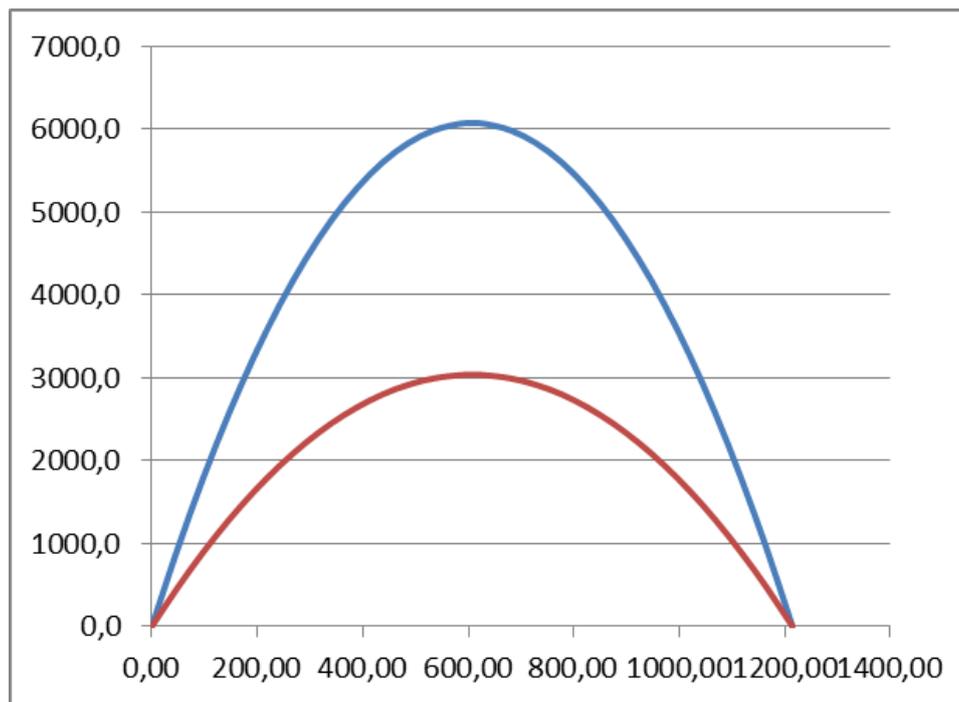


(a)

xLN (cm)	Nd (kN)	Md (kNxcn)
0	0,00	0,0
1,00	48,57	466,3
2,00	97,14	893,7
3,00	145,71	1282,3
4,00	194,29	1632,0
5,00	242,86	1942,9
6,00	291,43	2214,9
7,00	340,00	2448,0
8,00	388,57	2642,3
9,00	437,14	2797,7
10,00	485,71	2914,3
11,00	534,29	2992,0
12,00	582,86	3030,9
13,00	631,43	3030,9
14,00	680,00	2992,0
15,00	728,57	2914,3
16,00	777,14	2797,7
17,00	825,71	2642,3
18,00	874,29	2448,0
19,00	922,86	2214,9
20,00	971,43	1942,9
21,00	1020,00	1632,0
22,00	1068,57	1282,3
23,00	1117,14	893,7
24,00	1165,71	466,3
25,00	1214,29	0,0



(b)



(c)

**Figura 5** – Diagrama de interação  $N_d$  x  $M_d$  para um pilar de concreto simples: (a) Concreto C-25; seção 20cmx40cm;  $N_{d,máx}=1214\text{kN}$ ;  $M_{d,máx}=6071\text{kNxm}$  para  $x_{LN}=25\text{cm}$ ; mesmos dados para seção 40cm x 20cm;  $N_{d,máx}=1214\text{kN}$ ;  $M_{d,máx}=3036\text{kNxm}$  para  $x_{LN}=12,5\text{cm}$ ; (c) superposição dos dois diagramas.

O diagrama de interação é a representação gráfica dos pares  $N_d$ ,  $M_d$ , que esgotam a capacidade resistente de uma dada seção. A região interna ao diagrama de interação contém todos os pares de esforços solicitantes ( $N_d$ ,  $M_d$ ) simultâneos que podem ser aplicados na seção de forma segura. Alguns pontos merecem atenção especial no diagrama de interação. São eles:

- O ponto de maior abcissa ( $N_d=N_0$ ,  $M_d=0$ ): corresponde ao ponto em que a excentricidade  $e=0$  (daí ter sido usada a denominação de  $N_0$  para o valor de  $N_d$ ). Trata-se da maior força normal que a seção pode suportar e que somente poderá ser aplicada de forma centrada na seção;
- O ponto de maior ordenada ( $N_d=N_1=0,5N_0$ ;  $M_d=M_1$ ): corresponde ao maior momento fletor que a seção pode suportar e somente poderá ser aplicado simultaneamente com uma força normal de 50% $N_0$ ;
- O ponto ( $N_d=0$ ;  $M_d=0$ ) que indica que a seção não resiste à nenhum valor de tensão de tração, portanto quando  $N_d=0$  não poderá haver nenhuma excentricidade da força normal;

Se for traçada uma reta  $m$  passando pela origem, a mesma irá interceptar a curva de interação em um dado ponto ( $N_d$ ,  $M_d$ ). A relação  $M_d/N_d$  corresponde à excentricidade da força normal e ao mesmo tempo indica a declividade da reta  $m$ . Assim, como exemplo, no ponto de maior ordenada da

seção 20x40, a excentricidade correspondente será de  $6071\text{kN}\cdot\text{cm}/1214\text{kN}=5\text{cm}$ . Para o pilar 40x20,  $e=3036/1214=2,5\text{cm}$ . Em ambos os casos,  $e/h=1/8$  – observar que a excentricidade é sempre suposta na direção de  $h$  nos cálculos de flexão normal composta neste trabalho, salvo indicação em contrário.

## 2.2. Seções de concreto armado.

Os pilares de concreto armado apresentam armaduras longitudinal e transversal, da mesma maneira que as vigas. Se os esforços solicitantes estiverem dentro da região indicada pelo diagrama de interação da seção de concreto simples, não haveria necessidade de nenhuma armadura, teoricamente. No entanto, todas as normas recomendam que seja utilizada uma quantidade mínima de armadura longitudinal e transversal.

A armadura longitudinal, ou seja, a armadura disposta na mesma direção da força de compressão, tem normalmente duas funções:

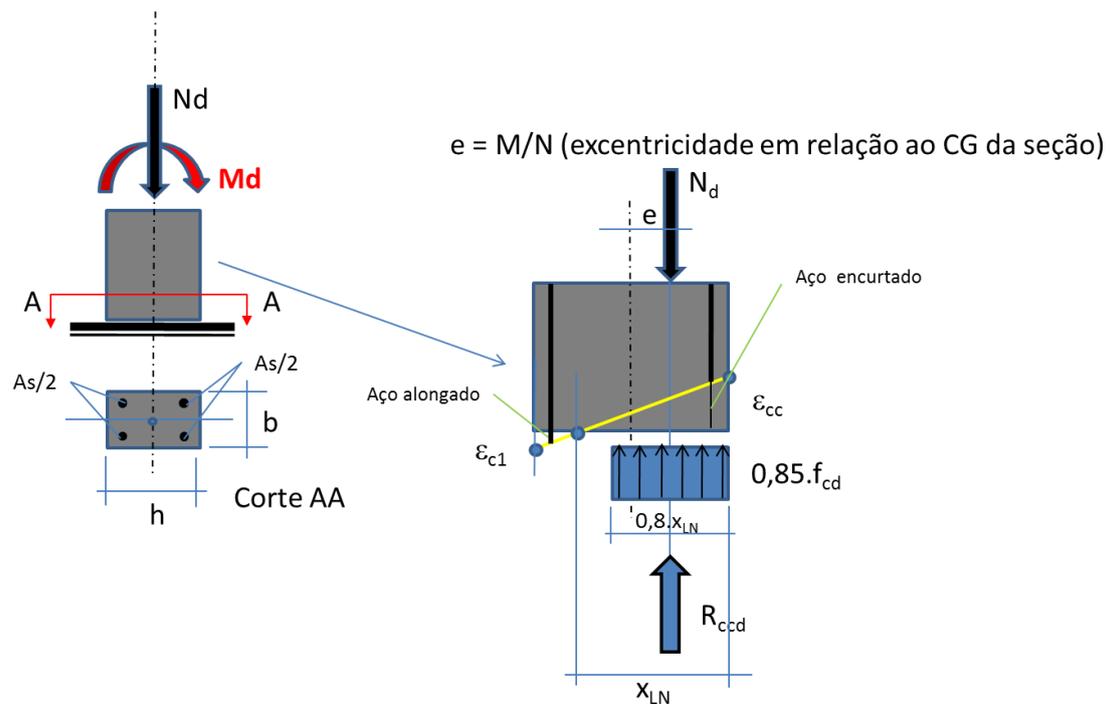
- Aumentar a capacidade resistente absorvendo os esforços de tração que surgem na seção transversal resultantes de grandes excentricidades da força normal;
- Posicionada do lado comprimido pelo momento fletor, reduzir as deformações, especialmente as devidas à deformação lenta e à retração;

A armadura transversal por sua vez apresenta como funções:

- Propiciar segurança contra flambagem da armadura longitudinal comprimida;
- Impedir fissuras prematuras de fendilhamento no concreto comprimido;

Continuando com a metodologia proposta pelo Prof. Graziano, procura-se agora construir o diagrama de interação  $N_d \times M_d$  para uma dada seção de concreto armado a partir do diagrama da mesma seção de concreto simples.

Assim, serão calculados acréscimos de resistência à força normal e à momento fletor fornecidos pela armadura em relação ao par  $N_d$ ,  $M_d$  determinado para o concreto simples. Isso será feito na forma de um exemplo.



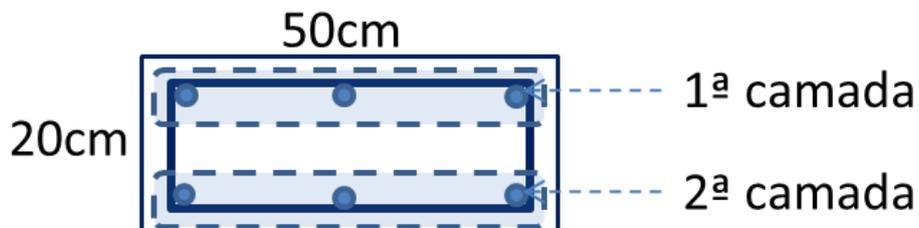
**Figura 6** – Definições para equacionamento de seção de concreto armado submetida à flexão normal composta (Graziano & Siqueira, 2011).

**Exemplo numérico 2:** Considere-se um pilar com seção 50x20 (Concreto C-30), armado com seis barras de 16mm (aço CA-50), conforme Figura 6. Os valores dos pares  $(N_d, M_d)$  a serem utilizados para construção do diagrama de interação para a seção sem armadura – concreto simples – são apresentados na Figura 5. Apresentam-se também os valores de  $x_{LN}/h$ . Todos os valores foram calculados a partir do equacionamento do item anterior.

xLN (cm)	Nd (kN)	Md (kNxcm)	xLN/h
0	0,00	0,0	0
1,00	72,86	699,4	0,05
2,00	145,71	1340,6	0,1
3,00	218,57	1923,4	0,15
4,00	291,43	2448,0	0,2
5,00	364,29	2914,3	0,25
6,00	437,14	3322,3	0,3
7,00	510,00	3672,0	0,35
8,00	582,86	3963,4	0,4
9,00	655,71	4196,6	0,45
10,00	728,57	4371,4	0,5
11,00	801,43	4488,0	0,55
12,00	874,29	4546,3	0,6
12,50	910,71	4553,6	0,625
13,00	947,14	4546,3	0,65
14,00	1020,00	4488,0	0,7
15,00	1092,86	4371,4	0,75
16,00	1165,71	4196,6	0,8
17,00	1238,57	3963,4	0,85
18,00	1311,43	3672,0	0,9
19,00	1384,29	3322,3	0,95
20,00	1457,14	2914,3	1
21,00	1530,00	2448,0	1,05
22,00	1602,86	1923,4	1,1
23,00	1675,71	1340,6	1,15
24,00	1748,57	699,4	1,2
25,00	1821,43	0,0	1,25

**Figura 7** – Dados para traçado do diagrama de interação para seção de concreto simples 50x20 (concreto Classe C-30), submetida à flexão normal composta.

**Solução:** Estudam-se os acréscimos de resistência dados pela armadura longitudinal para cada posição da linha neutra, iniciando-se pela situação em que a posição da linha neutra, dada pelo valor de  $x_{LN}$  é de 0,625h. Nesta situação tem-se  $N_d=911\text{kN}$  e  $M_d=4554\text{kNxcm}$ , na tabela da Figura 5. Agora, será feita a análise dos efeitos da armação (6 $\Phi$ 16mm) sobre esses dois valores. O arranjo da armadura é detalhado na Figura 8.



**Figura 8** – Arranjo das seis barras de 16mm (12cm<sup>2</sup>) em duas camadas na seção 20x50 ( $\rho=A_s/A_c=1,2\%$ ) – Graziano & Siqueira, 2011.

Quando  $x_{LN}/h=0,625$ , os valores das deformações do aço podem ser calculados conforme a Figura 9, admitindo-se as seguintes hipóteses, permitidas pela NBR 6118:

- A seção permanece plana após a deformação;
- Para  $x_{LN}=0,625h$ ,  $\epsilon_{cc}=0,35\%$  – sendo  $\epsilon_{cc}$  a deformação do concreto no bordo comprimido pelo momento fletor;

Com aplicação dessas hipóteses, obtém-se:

$$\begin{cases} \epsilon_{s,A1} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A1}) / x_{LN} \\ \epsilon_{s,A2} = 0,35\% \cdot (x_{LN} - x_{A2}) / x_{LN} \end{cases}$$

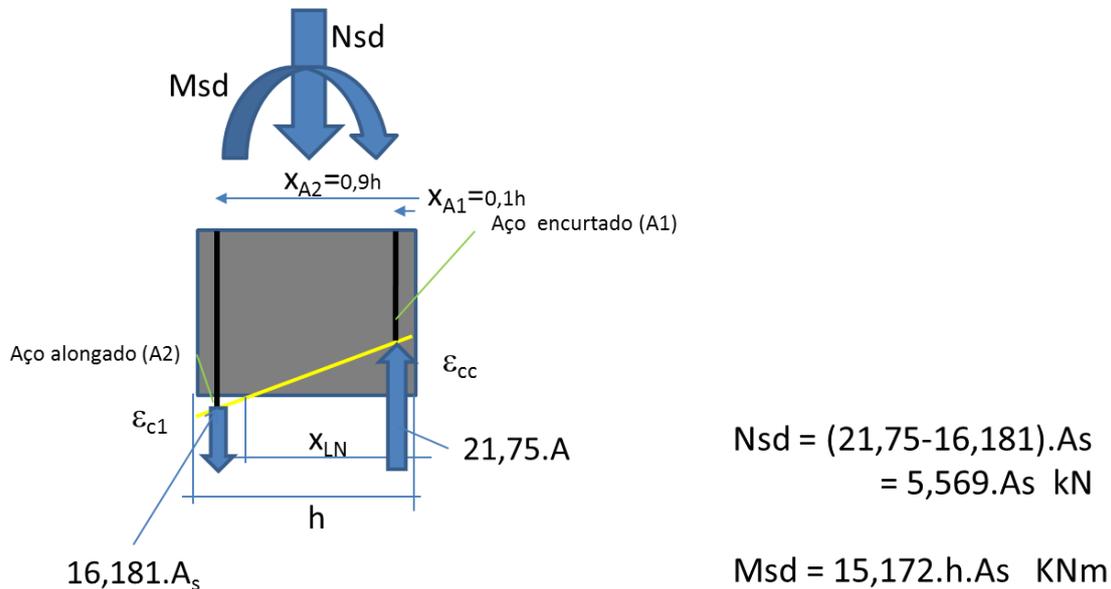


Figura 9 – Estudo da seção de concreto armado para  $x_{LN}=0,625h$ .

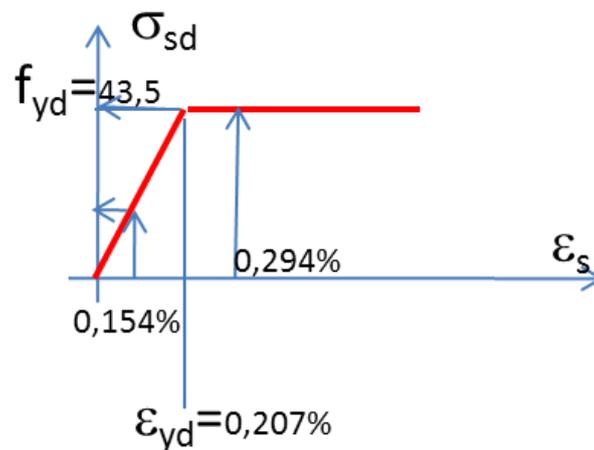
Nesse caso, tem-se:

$$\epsilon_{s,A1} = 0,35\% \times \frac{(0,625 - 0,1)}{0,625} = 0,294\%$$

$$\epsilon_{s,A2} = 0,35\% \times \frac{(0,625 - 0,9)}{0,625} = -0,154\%$$

Nas equações acima, os valores positivos denotam compressão – notação diferente da usual. Portanto, a armadura da primeira camada estará encurtando enquanto a da segunda camada estará alongando para esta posição da linha neutra.

Os valores de tensão nas armaduras da primeira e segunda camada ( $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ ) podem ser obtidos como indicado na Figura 10.



**Figura 10** – Cálculo das tensões nas armaduras a partir do diagrama tensão deformação do aço recomendado pela NBR 6118 utilizado para tração e compressão – observar que está sendo utilizado  $E_s=21000\text{kN/cm}^2$ .

No caso em estudo a primeira camada de armadura entra em escoamento, o que conduz à tensão de  $43,5\text{kN/cm}^2$ . A segunda camada encontra-se no trecho do diagrama tensão deformação em que vale a Lei de Hooke podendo-se calcular de forma simples a tensão, que valerá  $(0,154/0,207) \cdot 43,5 = 32,36\text{kN/cm}^2$ .

Dessa forma, tem-se as parcelas resistentes das duas armaduras que valem:

- $F_{Sd,A1} = 43,5\text{kN/cm}^2 \times 6\text{cm}^2 = 261\text{kN}$  (compressão);
- $F_{Sd,A2} = 32,36\text{kN/cm}^2 \times 6\text{cm}^2 = 194,16\text{kN}$  (tração);
- $F_{Sd} = 261 - 194,16 = 66,84\text{kN}$  (compressão);

Logo, o acréscimo de resistência fornecido pelo aço será de  $66,84\text{kN}$ . A seção de concreto simples resistia a  $910,71\text{kN}$  para essa posição da LN (Figura 5 – linha em vermelho) e passará a resistir a  $977,55\text{kN}$  devido à armadura.

Voltando à Figura 9, esse acréscimo de resistência de força normal fornecido pelo aço ( $N_{Sd}$ ) pode ser dado em função de  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ , e vale  $N_{Sd} = 5,569 \cdot A_s$ .

Porém, haverá também aumento no valor do momento fletor resistente fornecido pelo aço ( $M_{Sd}$ ), pois as forças nas armaduras produzem momento em relação ao CG da seção transversal da barra, que vale:

- $M_{Sd} = 261\text{kN} \times 0,4\text{h} + 194,16 \times 0,4\text{h} = 3640\text{kN} \times \text{cm}$ .

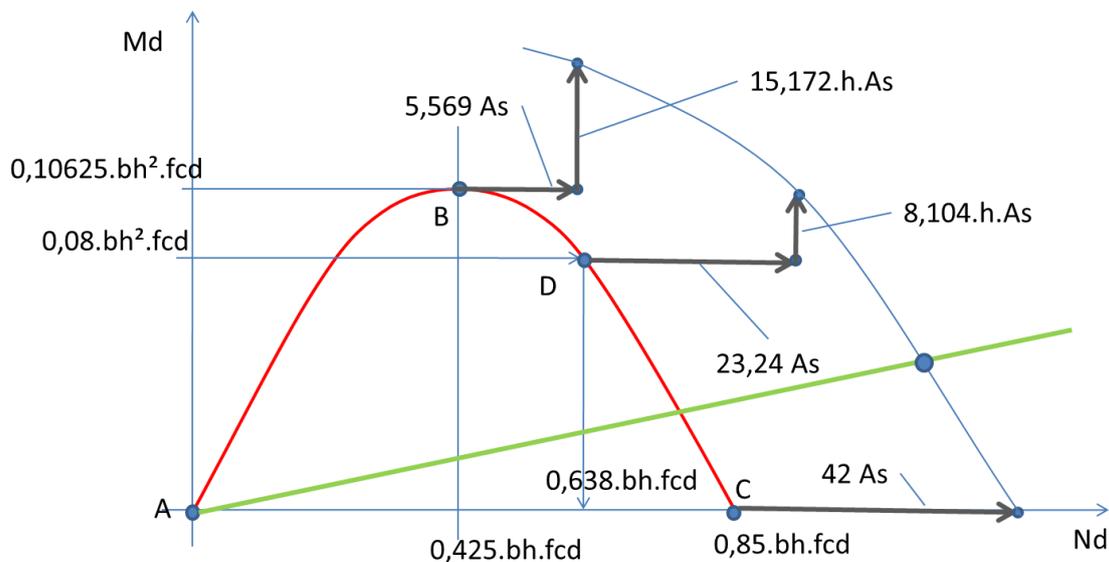
Novamente, com base na Figura 9, o valor de  $M_{Sd}$  pode ser expresso em função da armadura ( $A_s$ ) e da altura da seção ( $h$ ), resultando em  $15,172 \cdot h \cdot A_s$ .

O valor de  $M_d$  passará a ser:

- $M_d = 4554 + 3640 = 8194 \text{ kNxm}$ ;

Ou seja, o valor de  $M_d$  aumentou em 80% devido à presença de armadura para este valor de  $N_d$  (977,55kN). O valor 4554kNxm foi tomado da Figura 7.

O mesmo procedimento pode ser repetido para outros pontos do diagrama de interação da seção em concreto simples, chegando-se ao diagrama mostrado na Figura 11.



**Figura 11** – Representação gráfica de alguns valores de acréscimo de resistência calculados para a seção retangular (Graziano & Siqueira, 2011).

**Exemplo numérico 3:** Para a mesma seção do Exemplo 2, porém com flexão em torno do eixo de maior inércia, determinar os valores de  $N_d$  e  $M_d$  para  $x_{LN}=0,625h$ . Como simplificação, será desprezado o trabalho da armadura localizada na metade da seção.

**Solução:**

- $N_d = 910,71 + 5,569 \cdot 8 = 955,3 \text{ kN}$ ;
- $M_d = 11384 + 15,164 \cdot 8 = 11505 \text{ kNxm}$ ;

### 3. Flexão oblíqua composta.

Será apresentado o procedimento simplificado da NBR 6118, Item 17.2.5.2. A norma propõe que seja analisada a flexão normal composta em cada uma das direções independentemente e posteriormente se aplique a equação de interação:

$$\left[ \frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right]^\alpha + \left[ \frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right]^\alpha = 1$$

Na expressão acima:

- $M_{Rd,x}$  e  $M_{Rd,y}$  são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão oblíqua composta, segundo os dois eixos principais de inércia  $x$  e  $y$ , da seção bruta, com um esforço normal resistente de cálculo  $N_{Rd}$  igual à normal solicitante  $N_{Sd}$ . Esses são os valores que se deseja obter;
- $M_{Rd,xx}$  e  $M_{Rd,yy}$  são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos de flexão composta normal, com o mesmo valor de  $N_{Rd}$ . Esses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura em estudo;
- O coeficiente  $\alpha$  depende de vários fatores, tais como a força normal, a forma da seção, o arranjo de armaduras e de suas porcentagens. Em geral, a favor da segurança pode ser adotado igual a 1,0. Para seções retangulares,  $\alpha=1,2$ .

**Exemplo numérico 4:** Um pilar de concreto Classe C-30, com seção 20x50, armado com 6 $\Phi$ 16, conforme Figura 6, é submetido a  $N_d=978\text{kN}$  e  $M_{dx}=4097\text{kNxc}$ . Aproveitando os resultados anteriores, determine o valor de  $M_{Rdy}$ . Explicar o significado deste valor calculado.

**Solução:** Em primeiro lugar, relacionam-se os valores dos exemplos anteriores que serão aproveitados:

- $M_{Rd,xx}=8194\text{kNxc}$  – valor calculado anteriormente, no Ex.2, para  $N_d=978\text{kN}$ ;
- $M_{Rd,yy}=11505\text{kNxc}$  – valor calculado anteriormente, no Ex.3, para  $N_d=955\text{kN}$ , que será aproveitado como válido para  $N_d=978\text{kN}$ , dada a pequena diferença entre valores de  $N$ ;
- $\alpha=1,0$ ;

Encontra-se o seguinte resultado:

$$\left[ \frac{4097}{8194} \right]^{1,2} + \left[ \frac{M_{Rd,y}}{11505} \right]^{1,2} = 1$$

Para solucionar a equação, procede-se por tentativas, com auxílio de uma planilha, chegando-se a:

- $M_{Rd,yy}=7150\text{kNxc}$ ;

O significado do valor calculado é que, na flexão oblíqua composta, a seção apresentaria o terno resistente ( $N_d=978\text{kN}$ ;  $M_{dx}=4097\text{kNxc}$ ;  $M_{dy}=7150\text{kNxc}$ ). Isso quer dizer que a resistência a momento fletor em torno do eixo de maior inércia caiu cerca de 38% ( $1-7150/11505$ ).

O resultado do cálculo de flexão oblíqua composta pode ser representado graficamente como uma superfície de interação, conforme Figura 12. Esta superfície tridimensional pode ser visualizada em planos correspondentes a valores específicos de  $N_d$ .

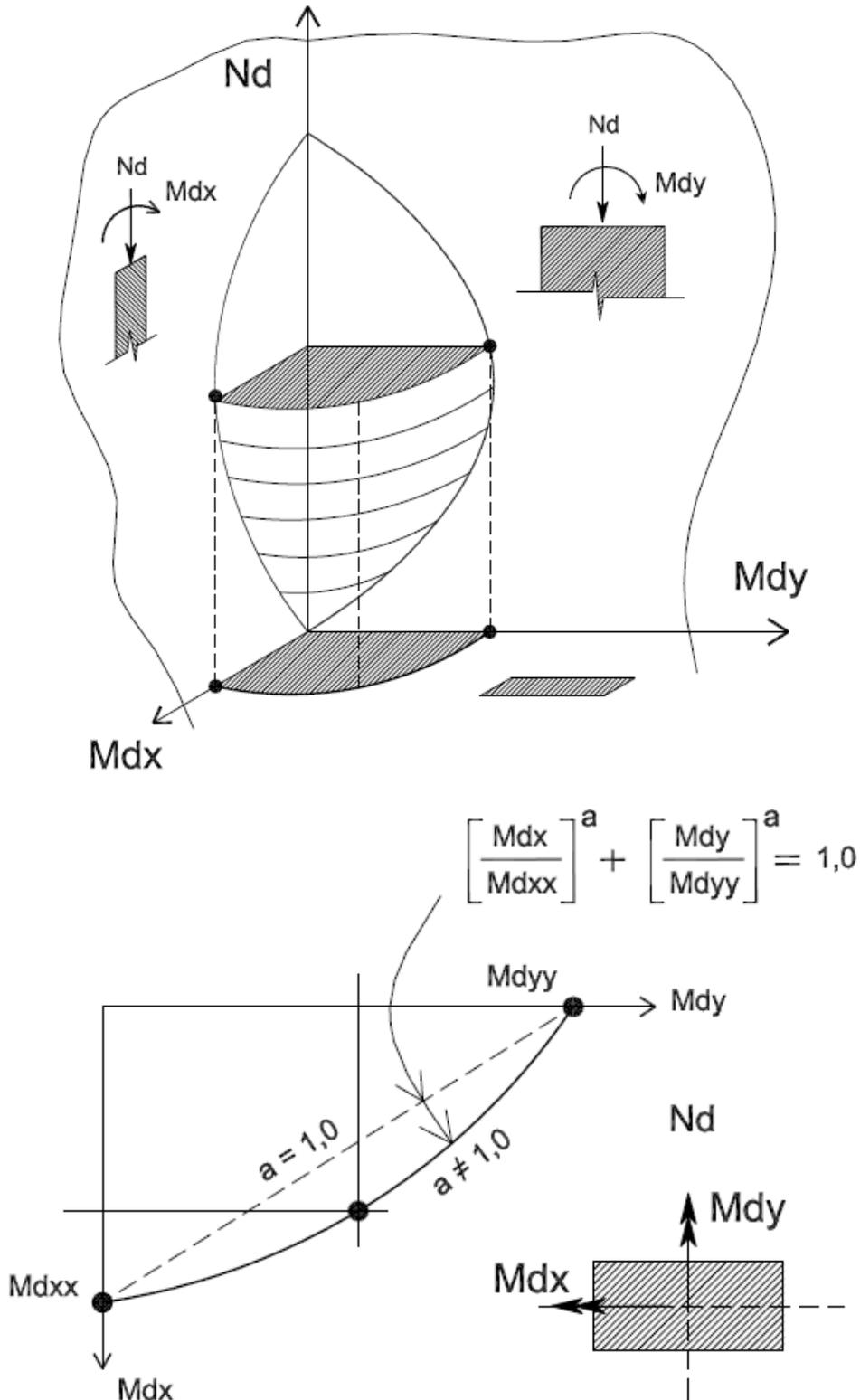


Figura 12 – Diagrama  $N_d$ ,  $M_{dx}$ ,  $M_{dy}$  para uma seção retangular de concreto simples.

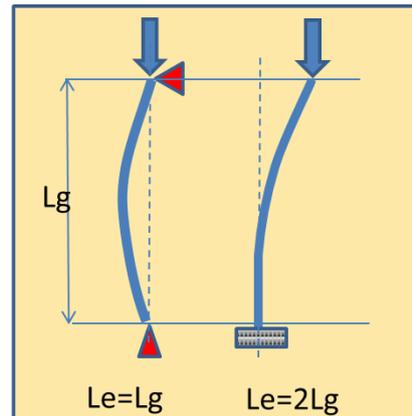
**4. Recomendações da NBR 6118 para dimensionamento de pilares.**

**4.1. Verificação analítica da segurança.**

Nesta seção, tratar-se-á apenas das recomendações referentes à estabilidade local, limitando-se ainda a esbeltez para situações em que os efeitos de segunda ordem locais possam ser calculados com a curvatura aproximada da seção.

A Figura 13 resume as recomendações da norma para as situações que serão tratadas nesta disciplina.

M1 é o momento solicitante que atua no pilar  
 $e_1 = M1d/Nd$  efeito de 1ª ordem  
 Com  $e_1 \geq e_{1,min} = 0,003h + 0,015 m$   
 A seção transversal do pilar é definida por b e h  
 $\lambda = 3,46.Le/h$  c/h e Le são tomados na direção de e1



Sempre que  $35 < \lambda \leq 90$  o pilar é considerado esbelto

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{0,005}{(v+0,5).h} \quad \text{Com } v+0,5 \geq 1 \quad v = \frac{N_d}{b.h.f_{cd}}$$

Momento total incluindo o efeito de 1ª e 2ª ordem

$$M_d = (e_1 + e_2). N_d$$

Obs.: se  $\lambda \leq 35$  (pilar curto) admitir  $e_2 = 0$   
 se  $\lambda > 90$  aumentar seção

O efeito da esbeltez ( $\lambda$ ) é levado em consideração pelo acréscimo de uma excentricidade adicional e2

**Figura 13** – Definições para cálculo de excentricidades adicionais para dimensionamento de pilares de concreto conforme NBR 6118 (Graziano & Siqueira, 2011).

**4.2. Disposições construtivas.**

A armadura longitudinal dos pilares deve obedecer aos seguintes valores:

- $A_{s,min} = 0,15N_d/f_{yd} \geq 0,004A_c$ .
- $A_{s,máx} = 8\% A_c$ .

Para a armadura máxima devem-se considerar as seções de emendas. As barras devem ter diâmetro igual ou superior a 10mm e não mais que 1/8 da menor dimensão da seção do pilar.

Os estribos devem ter diâmetro  $\Phi_t$  no mínimo de 5mm ou  $\frac{1}{4}$  do diâmetro das barras longitudinais ( $\Phi$ ). O espaçamento entre estribos não deve ser superior a:

- 200mm;
- $12\Phi$  para aço CA50 e  $24\Phi$  para aço CA25;
- Menor dimensão da seção do pilar;

Caso haja força cortante considerável no pilar, os estribos devem ser dimensionados da mesma maneira que em vigas.

Para proteger as barras longitudinais contra flambagem os estribos devem ser complementados com outros estribos ou barras retas terminadas em ganchos conforme figura abaixo.

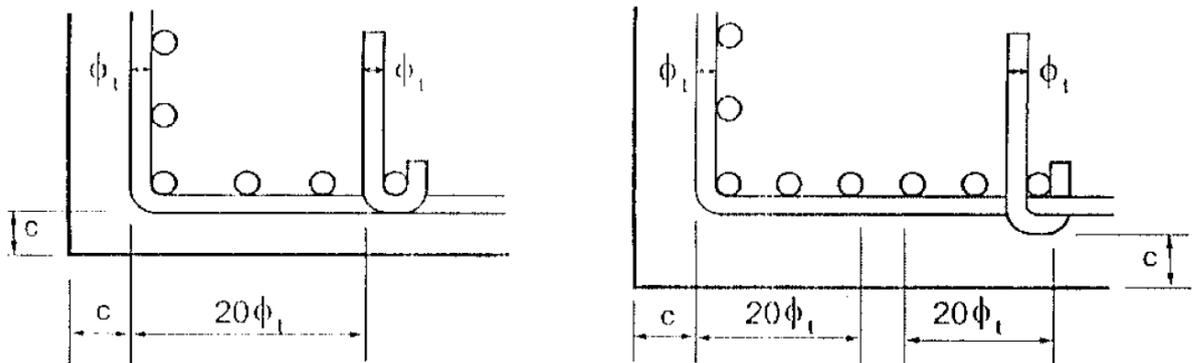


Figura 14 – Proteção contra flambagem das barras.

A menor dimensão da seção transversal de um pilar deve ser de 19cm, caso contrário deve-se aplicar coeficientes de majoração dos esforços de cálculo, conforme figura abaixo da NBR 6118.

Tabela 13.1 – Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$

b cm	≥ 19	18	17	16	15	14	13	12
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35

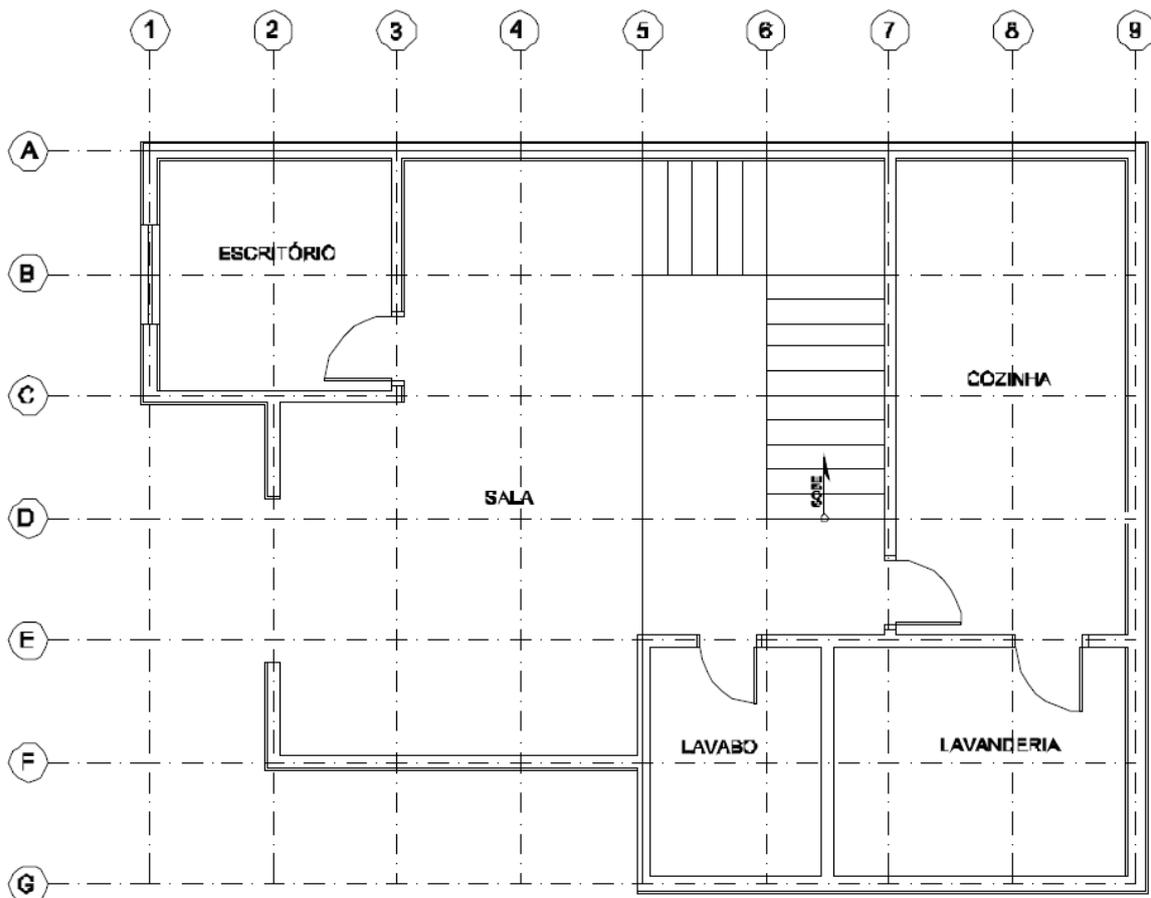
Onde:  
 $\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$ ;  
**b** é a menor dimensão da seção transversal do pilar.

NOTA O coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo nos pilares, quando de seu dimensionamento.

## 5. Cargas nos pilares.

As cargas atuantes nos pilares devem ser obtidos por modelos de análise estrutural que reproduzam de forma adequada o comportamento real da estrutura. Um procedimento muito simples para definir essas cargas pode ser feito com uso de áreas de influência. Considere-se o exemplo descrito a seguir.

São fornecidas as plantas de arquitetura do térreo e do pavimento superior de uma edificação de pequeno porte. Nas Figuras 15 e 16, apresentam-se as plantas baixas dos pavimentos térreo e superior.



**Figura 15** – Pavimento térreo do exemplo.

A edificação deverá ter estrutura de concreto armado, com lajes maciças no primeiro piso e na cobertura, conforme Figura 17. No nível do térreo serão executadas vigas baldrame, conforme se apresenta na Figura 18. Por fim, nas figuras 19 e 20, apresentam-se as fôrmas das duas lajes.

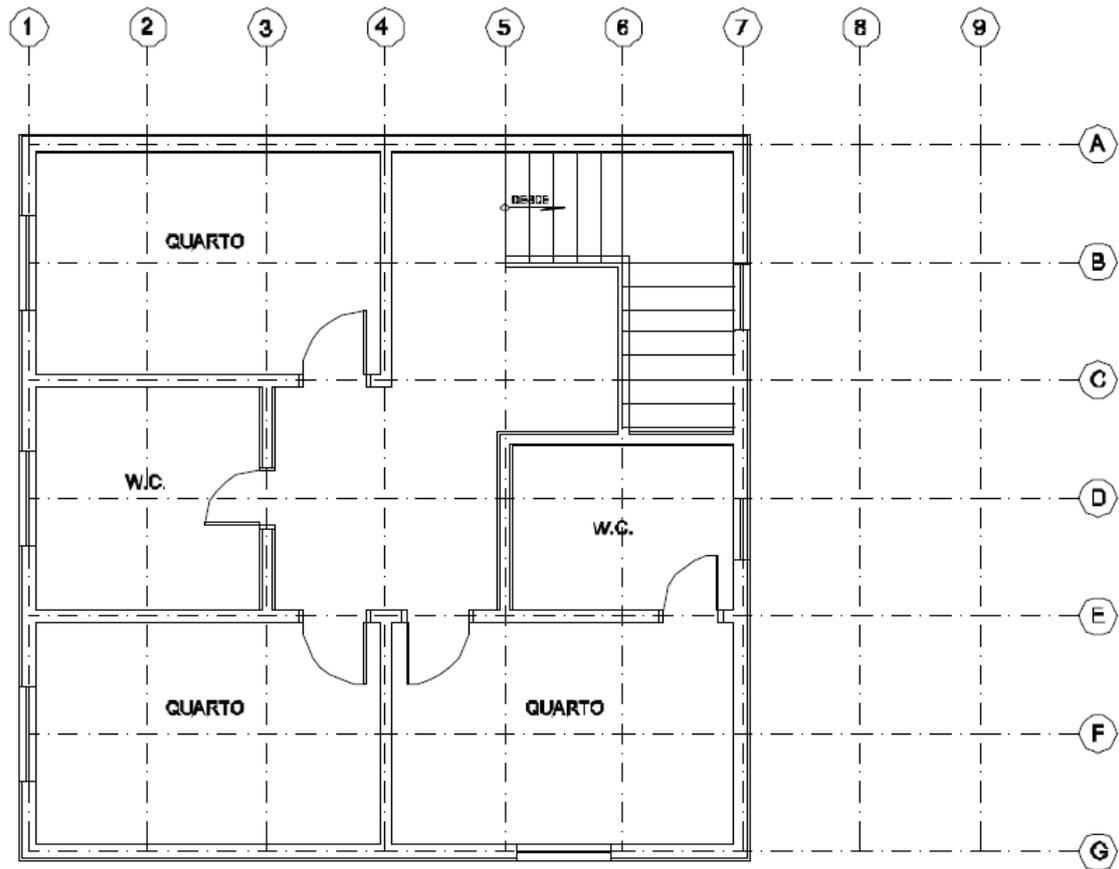


Figura 15 – Pavimento superior do exemplo.

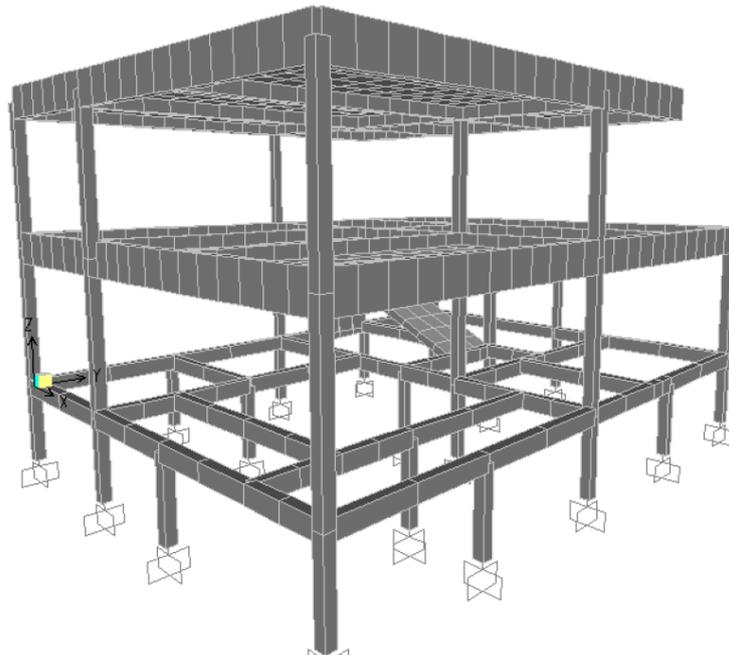
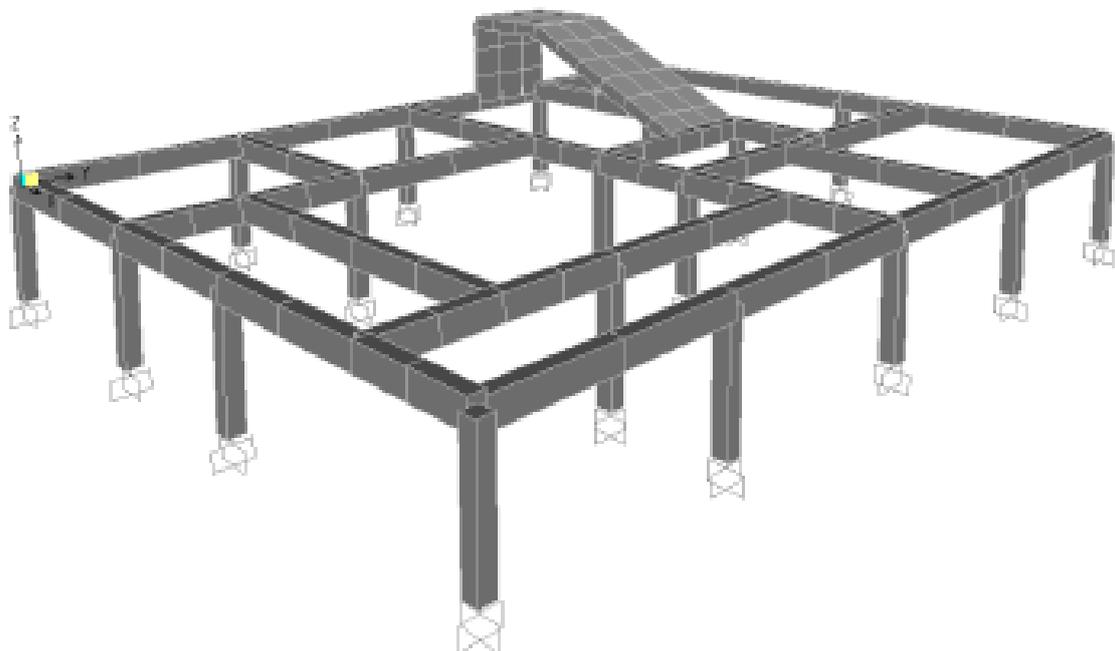
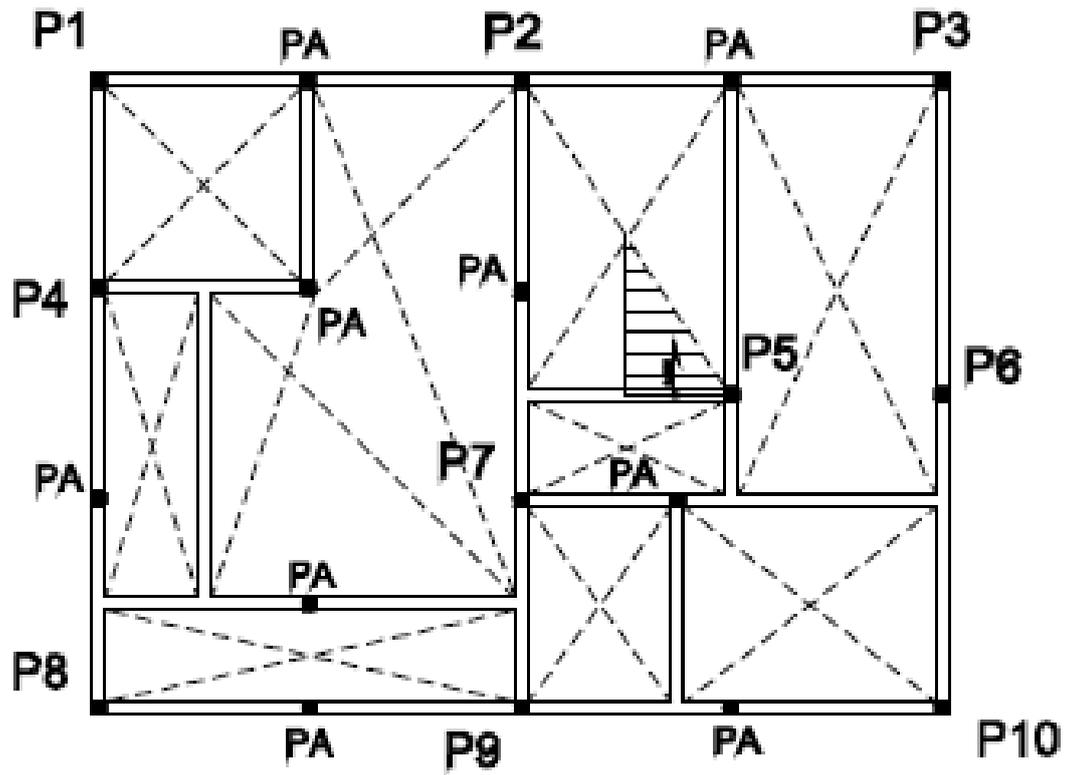


Figura 16 – Vista geral da estrutura – fundações não representadas.



**Figura 17** – Planta das vigas baldrame e perspectiva – fundações não representadas; vigas baldrame não numeradas.

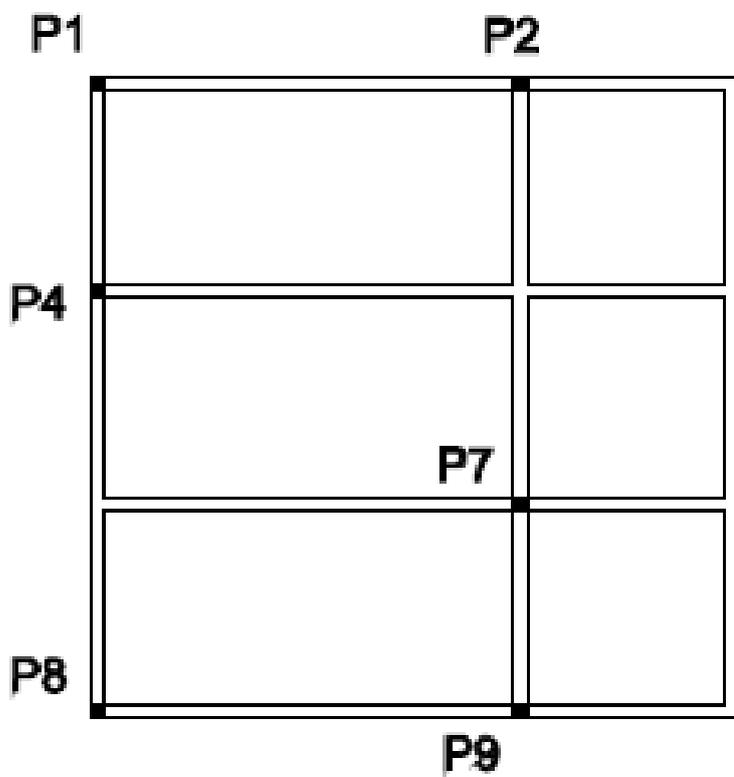
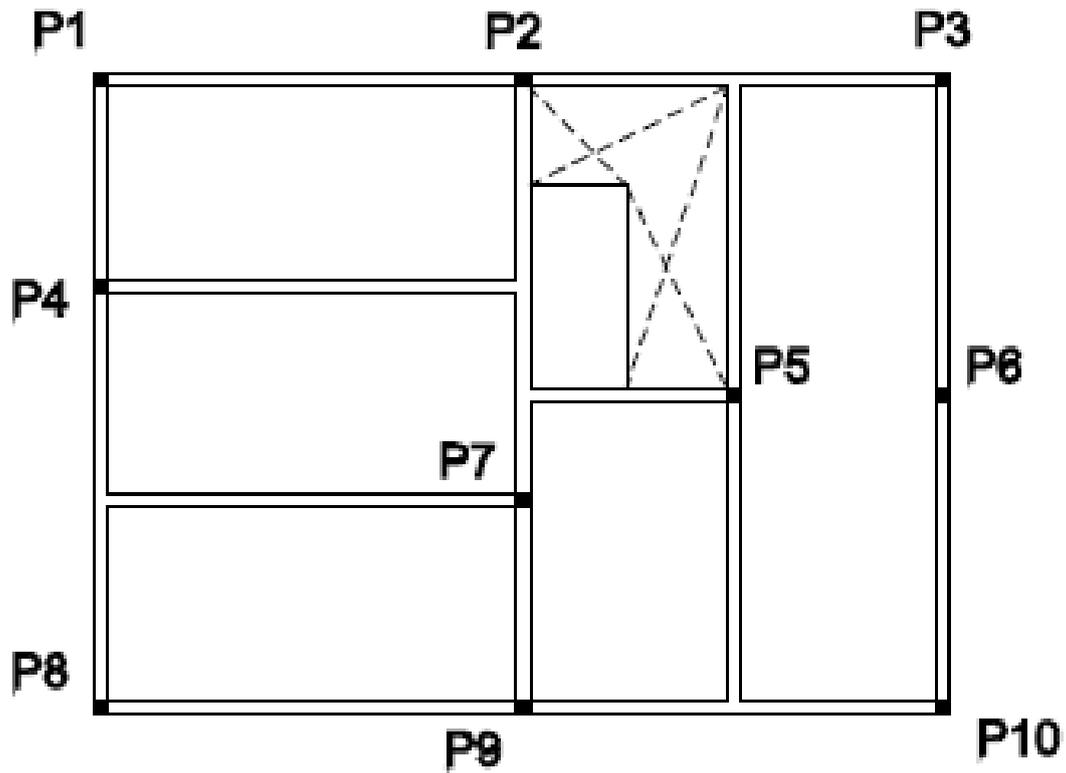
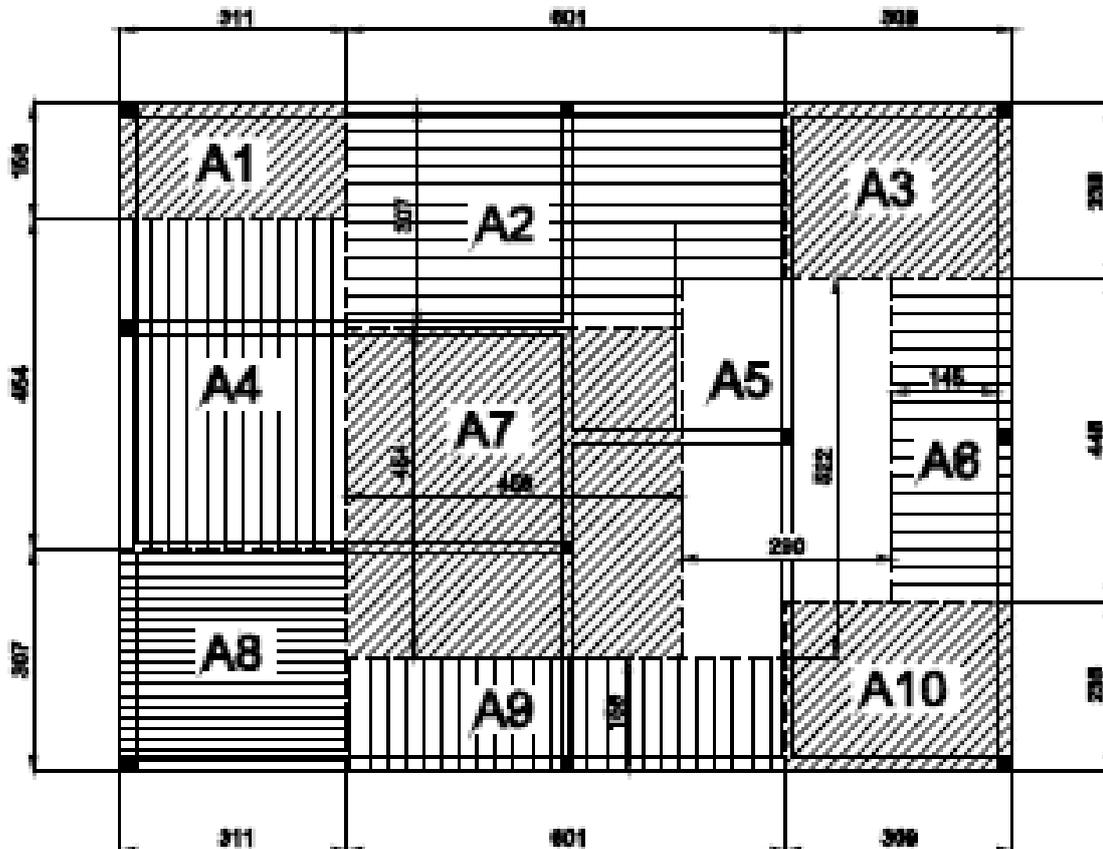


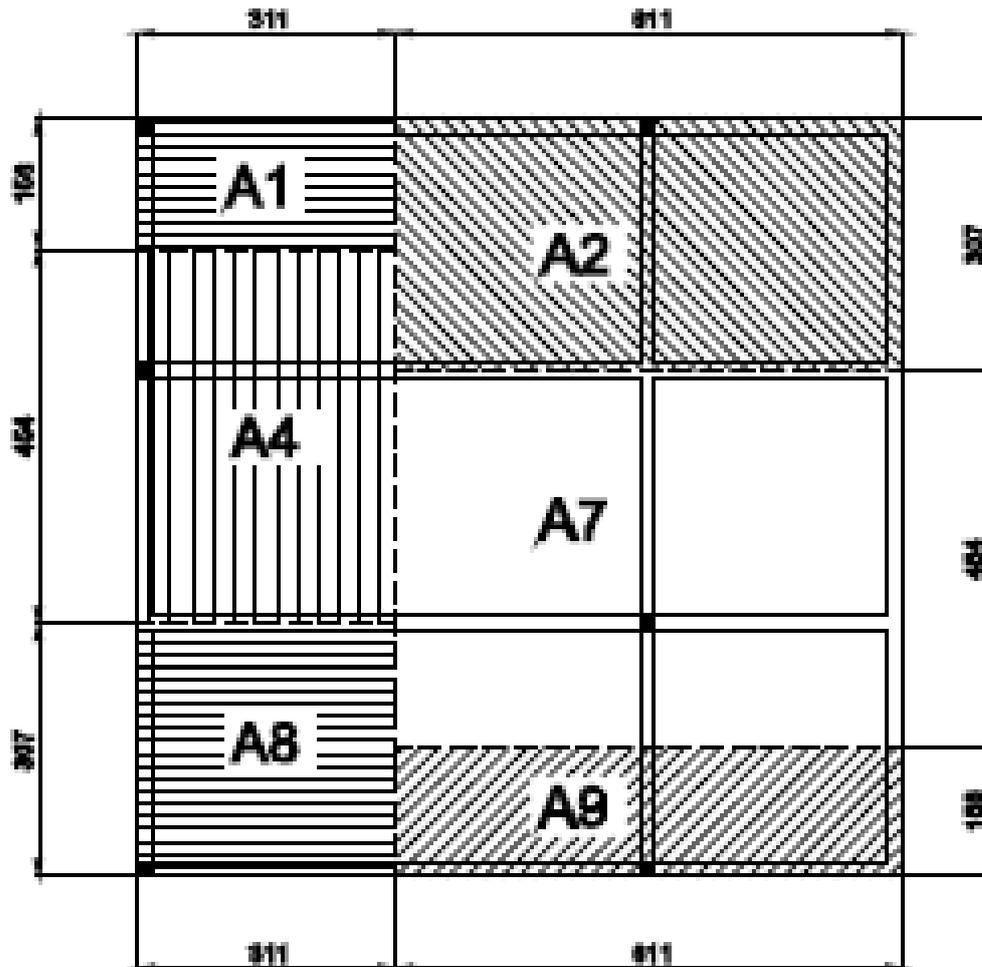
Figura 18 – Plantas de fôrma do primeiro piso e cobertura – lajes e vigas não numeradas.

Nas figuras a seguir, apresentam-se as áreas de influência de cada pilar e as respectivas cargas, calculadas por área de influência e por somatório das reações das vigas.



PRIMEIRO PISO (g + q = 10kN/m <sup>2</sup> )				
Pilar	B (m)	L (m)	Ai (m <sup>2</sup> )	Carga (kN)
1	3,11	1,58	5	49
2	3,07	6,01	18	185
3	3,09	2,39	7	74
4	3,11	4,54	14	141
5	2,9	5,22	15	151
6	1,45	4,45	6	65
7	4,58	4,54	21	208
8	3,11	3,07	10	95
9	6,01	1,58	9	95
10	3,09	2,35	7	73
			114	

Figura 19 – Figura para cálculo de áreas de influência do primeiro piso.



COBERTURA ( $g + q = 7\text{kN/m}^2$ )				
Pilar	B (m)	L (m)	Ai (m <sup>2</sup> )	Carga (kN)
1	3,11	1,58	5	34
2	6,11	3,07	19	131
3	0	0	0	0
4	3,11	4,54	14	99
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	6,11	4,54	28	194
8	3,11	3,07	10	67
9	6,11	1,58	10	68
10	0	0	0	0
			85	

Figura 19 – Figura para cálculo de áreas de influência da cobertura.

CARGAS NA FUNDAÇÃO (kN)					
Pilar	COB (kN)	1P (kN)	POR A.I. (*)	$\Sigma$ R.V. (**)	Diferença
1	34	49	109	71	52,87%
2	131	185	329	330	0,36%
3	0	74	99	52	90,10%
4	99	141	253	291	15,01%
5	0	151	201	237	17,69%
6	0	65	90	87	2,90%
7	194	208	452	458	1,30%
8	67	95	187	158	18,55%
9	68	95	176	200	13,94%
10	0	73	98	61	60,02%
Somatório (kN)			1992,7	1945	2,45%
(*) A.I. = Area de influência					
(**) $\Sigma$ R.V. = Soma das reações de vigas					

TÉRREO	
Pilar	Carga (kN)
1	25
2	13
3	25
4	13
5	50
6	25
7	50
8	25
9	13
10	25

**Figura 19** – Comparação entre as cargas encontradas com áreas de influência e por somatório das reações de vigas no exemplo.

## 6. Introdução ao dimensionamento das fundações rasas.

As cargas dos pilares deverão ser aplicadas no solo através de fundações, que podem ser rasas ou profundas. A NBR 6122 define uma fundação rasa como sendo aquela em que a carga é transmitida ao terreno pelas tensões distribuídas sob a base da fundação, e a profundidade de assentamento em relação ao terreno adjacente à fundação é inferior a duas vezes a menor dimensão da fundação.

As fundações rasas podem ser do tipo:

- Sapatas de concreto armado, podendo ainda ser:
  - Sapata isolada, que recebe a carga de um único pilar;
  - Sapata associada, comum a mais de um pilar;
  - Sapata corrida, sujeita à carga distribuída linearmente, decorrente, por exemplo, de uma parede estrutural ou de pilares ao longo de um mesmo alinhamento;

- Bloco, que pode ser definido como uma sapata de concreto simples, que é dimensionado de forma que as tensões de tração nele resultantes sejam resistidas pelo concreto, sem necessidade de armadura;
- Radier, que é um tipo de fundação rasa que abrange parte ou todos os pilares de uma estrutura, distribuindo os carregamentos;

Eventualmente esses elementos são complementados por vigas alavanca, também denominadas vigas de equilíbrio, que são destinadas a receber as cargas diretamente de um ou dois pilares e são dimensionadas de modo a transmitir as cargas desses pilares centradas às fundações.

Trata-se a seguir somente de sapatas, isoladas ou corridas, cujo dimensionamento envolve a definição de:

- Dimensões em planta e da altura da sapata;
- Profundidade de assentamento;
- Propriedades dos materiais e detalhamento de armaduras;

Neste trabalho será tratado apenas da definição das dimensões em planta e da altura, etapa que será denominada pré-dimensionamento. Para não estender demasiadamente o assunto, a altura será definida de forma a se obter uma sapata rígida, conforme se verá adiante.

É intuitivo imaginar que no contato com o solo, as dimensões do elemento estrutural deverão ser aumentadas, de forma que a carga transmitida pelo pilar se distribua numa área bem maior que a do pilar, pois a resistência do solo é muito inferior à do concreto.

Retornando ao assunto de verificação analítica de segurança, o valor admissível de  $q$  deverá ser definido de tal forma que a resistência seja maior que a sollicitação. Para fins desta apresentação, será usado o conceito de tensão admissível em vez de estados limites. Dessa forma, tratar-se-á tal valor como  $q_{adm}$ .

O valor de  $q_{adm}$  pode ser obtido por meio de análise teórica baseada em resultados de ensaios do solo – ensaios de campo e de laboratório. A fixação do valor de  $q_{adm}$  também pode ser feita com base em prova de carga realizado no terreno de implantação da obra com metodologia específica definida por norma. Na prova de carga seria definido o valor da carga de ruptura  $q_u$  e o valor de  $q_{adm}$  é obtido por:

$$q_{adm} = \frac{q_u}{F.S.}$$

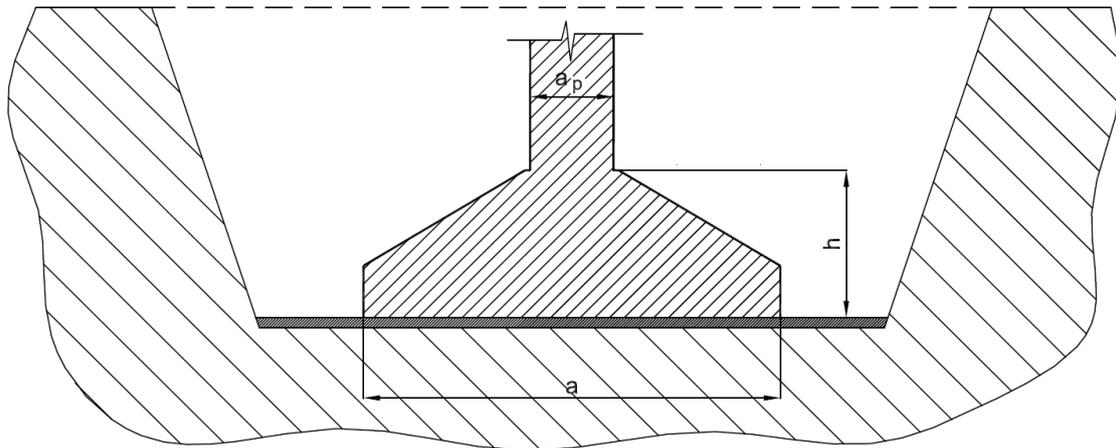
Onde F.S. é um fator de segurança, que normalmente é da ordem de 3,0. Nos problemas que serão tratados aqui o valor de  $q_{adm}$  será sempre fornecido, pois a sua determinação é um problema especializado que envolve

investigações preliminares bem conduzidas e análise de profissional especializado.

Definido o valor de  $q_{adm}$ , torna-se simples a determinação das dimensões em planta. A altura da sapata ( $h$ ) por sua vez pode ser definida com a expressão abaixo, que vale para sapatas rígidas apenas:

$$h \geq \frac{a - a_p}{3}$$

A Figura 13 esclarece a aplicação da fórmula para definição de  $h$ . Após esses cálculos de pré-dimensionamento, estando definidas a área em planta e a altura da sapata, deve-se prosseguir o dimensionamento efetuando uma série de verificações que não serão tratadas neste texto. Eventualmente, em função dessas verificações pode-se fazer necessário alterar uma das dimensões e então o processo é repetido.



**Figura 13** – Definição de altura  $h$  de uma sapata de concreto armado para que a mesma possa ser considerada como rígida, conforme ABNT NBR 6118 (2004),

**Exemplo numérico 5:** Pré-dimensionar uma sapata para um pilar de seção 50cmx20cm com carga de 1000kN para  $q_{adm}=0,2\text{MPa}=200\text{kN/m}^2$  (segundo procedimento sugerido por ALONSO, 1983 – página 14).

**Solução:** Como o pilar tem seção retangular, a sapata mais adequada deverá ser retangular e apresentar balanços iguais nas duas direções. Dessa forma:

- $a \times b = 1000/200 = 5,0\text{m}^2$  ou  $50000\text{cm}^2$ ;
- $a - b = a_0 - b_0 = 50 - 20 = 30\text{cm}$ ;
- $(30 + b) \times b = 50000$
- $b^2 + 30b - 50000 = 0 \leftrightarrow b=209,1\text{cm}$ ;

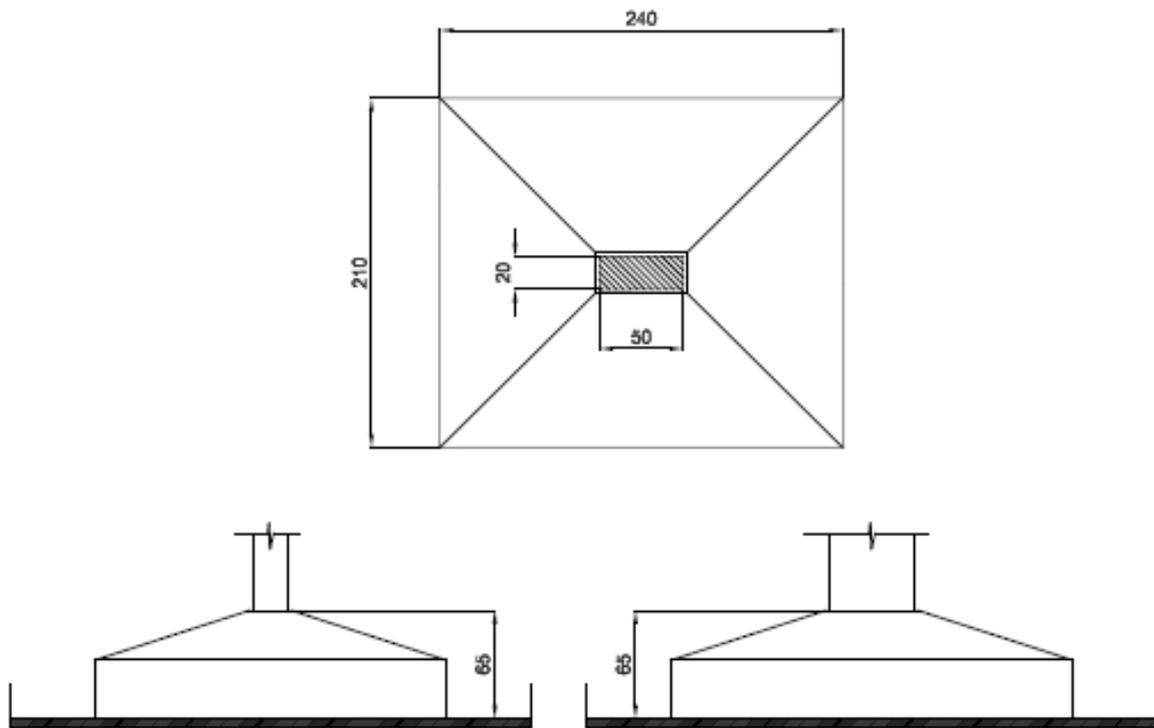
Adotando-se  $b=210\text{cm}$ , tem-se:

- $a = 30 + b = 240\text{cm}$ ;

Para que a sapata seja rígida, a altura  $h$  deve ser tal que:

- $h = (a - a_0)/3 = (b - b_0)/3 = (210-20)/3 = 63,3$ , digamos 65cm.

Dessa forma, tem-se a sapata 240x210x65. A Figura 14 ilustra o resultado.



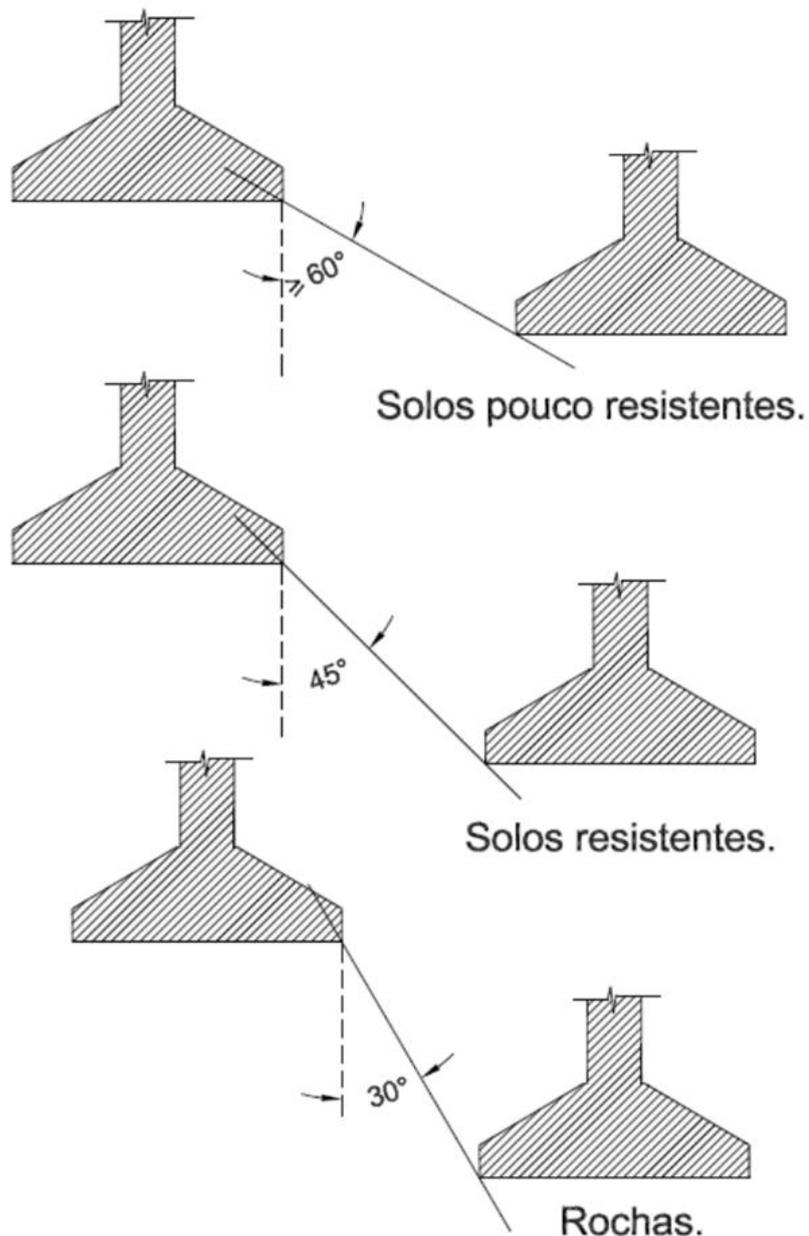
**Figura 14** – Resultados do exemplo numérico.

ALONSO (1983), descreve as etapas de execução de uma sapata:

- "...é feita inicialmente uma escavação até a cota de apoio. Essa escavação é geralmente em talude com uma folga no pé, em relação às dimensões da sapata, da ordem de 50cm. Esse talude é tanto mais vertical quanto mais resistente for o solo. As inclinações normalmente usadas variam de 1:1 a 1:3 (H:V)."
- "A segunda etapa consiste em lançar uma camada, com 5cm de espessura, de concreto magro, apoiar a fôrma do rodapé da sapata (as superfícies inclinadas da sapata não levam fôrma) e colocar a armação da sapata e os ferros de arranque do pilar."
- A concretagem é feita até a face superior da sapata, após o que é retirada a fôrma da mesma e colocada a ferragem do pilar e a fôrma do mesmo, seguindo-se sua concretagem. Finalmente, promove-se o reaterro em torno da sapata, após desenformar o pilar."

A NBR 6122, no Anexo A, Item A.5, enfatiza que o reaterro da cava deve ser feito somente após a cura do concreto.

A segurança irá também depender de questões construtivas, além das analíticas. Dentre estas condições, destaca-se a situação de sapatas próximas, porém assentadas em profundidades diferentes. De acordo com o tipo de solo, haverá distâncias mínimas entre essas sapatas que precisarão ser respeitadas, salvo casos especiais. Além disso, deve-se executar primeiro a sapata que está assente à maior profundidade. A Figura 15 esclarece o que se disse.



**Figura 15** – Distâncias mínimas entre sapatas próximas, porém assentadas em profundidades diferentes, conforme ABNT NBR 6122 (2010).

### 6.1. Comentários sobre fundações profundas.

Para as situações correntes, as fundações profundas são geralmente usadas nos seguintes casos:

- Quando um solo com capacidade de carga razoável pode ser alcançado somente a grandes profundidades;
- Em construções que transmitem grandes cargas concentradas muito elevadas para a fundação;
- Para estruturas muito sensíveis a recalques de apoio;
- Em terrenos com nível d'água muito elevado, que dificulte a escavação;

Estas fundações podem ser em estacas ou tubulões, ou ainda fundações especiais. Nos últimos anos o uso de fundações profundas cresceu bastante devido a uma série de motivos:

- O uso de muitos tipos de fundações profundas, particularmente de estacas, é associado à maior mecanização do que a execução de fundações rasas, e a mecanização de obras é um fator importante para se conseguir prazos e custos compatíveis com a crescente exigência da sociedade;
- Nas grandes cidades, a ocupação de terrenos em áreas menos propícias ao uso de fundações rasas, que apresentem nível d'água elevado ou camadas de solo resistentes a grandes profundidades, tem aumentado;

Apesar dessa crescente utilização de fundações profundas, notadamente estacas pré-fabricadas, este tema não será abordado neste trabalho por questões de tempo, podendo o aluno interessado consultar a bibliografia especializada.

**BIBLIOGRAFIA**

ABNT\_NBR 6118. Projeto e execução de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

ABNT\_NBR 6122. Projeto e execução de fundações. Rio de Janeiro: ABNT, 2010.

ALONSO, U. R. Exercícios de fundações. São Paulo: Edgard Blücher, 1983.

BELL, B. J. Fundações em concreto armado. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

GRAZIANO, F. P. & SIQUEIRA, J. A. L. PEF 2304 FAU-USP. Dimensionamento de pilares.

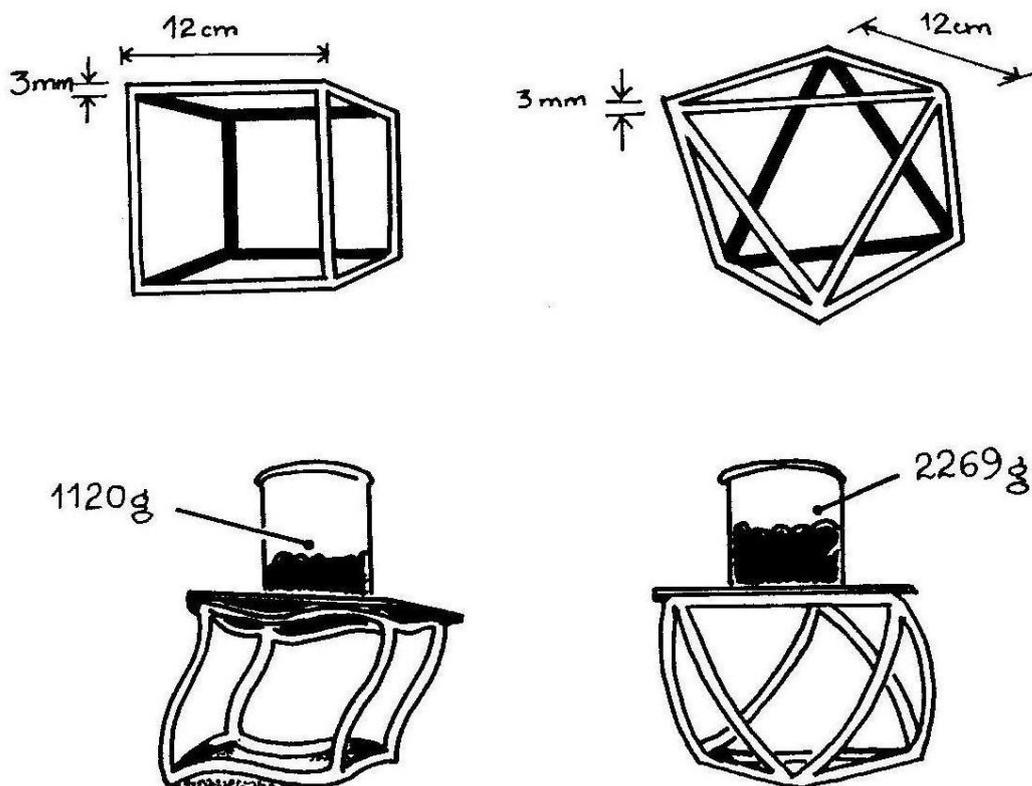
LEONHARDT, F. & MÖNNIG, E. Construções de concreto. V. 3. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

PEARCE, P. Structures in nature is a strategy for design. MIT, 1978.

## ANEXO 1

**Conceituação de estabilidade global e local por meio de experimento.**

Considere-se o experimento ilustrado na Figura A1.1, extraído de PEARCE (1978). Um pórtico de pequenas dimensões é carregado de forma monotônica e gradual até que não apresente mais resistência quando a carga total é de 1120 gf. Repetindo-se o experimento com uma estrutura com arranjo um pouco diferente, chega-se a valor de carga última de 2269 gf. Observar que o novo arranjo das barras da estrutura, na forma de octaedro regular, tornou a estrutura muito mais rígida e com aproximadamente o dobro da resistência. No entanto, o consumo de materiais nas duas situações é rigorosamente o mesmo. Este exemplo ilustra o fato de que em um projeto real pode-se sempre buscar um arranjo mais eficiente dos elementos estruturais. Por outro lado, cumpre observar que se essa eficiência estrutural fosse referenciada ao volume interno à estrutura, o cubo estaria em ligeira vantagem haja vista que encerra volume um pouco superior ao dobro daquele interno a um octaedro regular –  $V_{\text{cubo}}=a^3$  e  $V_{\text{octaedro}}=(\sqrt{2})a^3/3\approx 0,47a^3$ .



**Figura A1.1** – Experimento realizado por PEARCE (1978) e utilizado neste texto para ilustrar a diferença conceitual entre estrutura de nós móveis e estrutura de nós fixos.

Denominando a estrutura do primeiro experimento como estrutura de nós móveis e a do segundo experimento estrutura de nós fixos, apresentam-se as seguintes constatações após os dois experimentos:

- A carga última da estrutura de nós fixos é 2,0 vezes maior que a da estrutura de nós móveis.
- Na estrutura de nós móveis, os nós da estrutura, que são as ligações viga-pilar, apresentam deslocamentos maiores que aqueles verificados ao longo das barras. Na estrutura de nós fixos ocorre o contrário.
- Em ambas as estruturas verifica-se que as barras se deformam por flexão, embora os esforços, ao menos os iniciais, sejam de compressão centrada.

Há que se reconhecerem as limitações do modelo acima para simular o comportamento de uma estrutura real de concreto armado por questões de escala, comportamento dos materiais, distribuição da carga, etc. Apesar disso, o modelo fornece informações que podem ser usadas para entender melhor algumas recomendações e definições da NBR 6118 referentes a dimensionamento de pilares de estruturas de concreto, relacionadas a seguir.

- Nas estruturas esbeltas, os esforços de segunda ordem não podem ser desprezados no dimensionamento;
- Nas estruturas de nós fixos, os esforços de segunda ordem mais importantes são os locais, que são decorrentes dos deslocamentos que ocorrem ao longo do comprimento da barra.
- Nas estruturas de nós móveis, os esforços de segunda ordem globais, decorrentes de deslocamentos dos nós da estrutura são muito importantes, embora os locais não sejam desprezíveis.

Antes, definem-se os chamados efeitos de segunda ordem, no contexto da análise estrutural, como sendo aqueles obtidos fazendo-se análise da estrutura na posição deformada.

Se a estrutura é muito esbelta, a consideração dos efeitos de segunda ordem é indispensável na verificação de segurança. No caso do experimento, a esbeltez de uma barra da estrutura é de  $l/h=120/3=40$  – valor excessivamente alto. Um pilar de concreto com  $l=300$  cm, por exemplo, geralmente tem dimensão mínima em torno de 20 cm, o que resulta em  $l/h=15$ .

Naturalmente, no experimento, a esbeltez foi feita grande propositalmente para que as estruturas apresentassem problema de estabilidade e não de resistência.

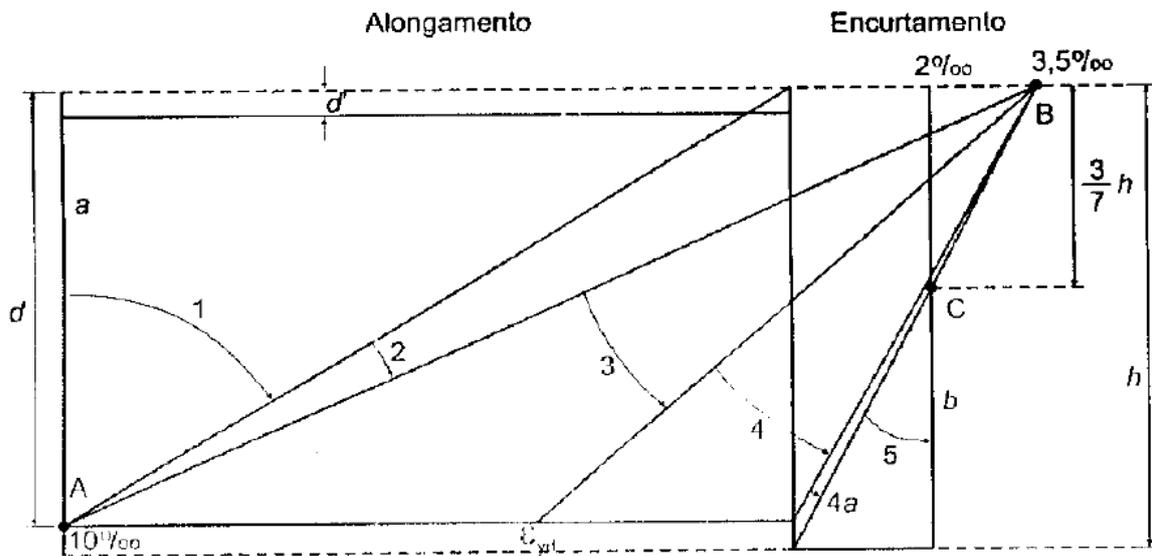
Na prática de projeto, devem-se evitar situações como essas. Para tal, geralmente adotam-se limites de esbeltez, sejam globais ou locais. A esbeltez global é referente à rigidez da estrutura como um todo frente à ações laterais. De acordo com limites dessa rigidez, pode-se classificar a estrutura como de nós móveis de nós fixos.

A esbeltez local, em geral pode ser avaliada pela relação  $l/h$  de cada uma das barras, ou mais precisamente pela relação entre o comprimento de flambagem da barra e o raio de giração da sua seção transversal.

A definição precisa dos limites de esbeltez global está fora do escopo deste trabalho, mas é um assunto que deve necessariamente ser abordado em um projeto estrutural. Neste texto será tratado unicamente o dimensionamento desses elementos levando-se em conta efeitos de 2ª ordem locais, ou seja, supondo-se que a estrutura é de nós fixos.

ANEXO 2

Domínios de deformação segundo a NBR 6118.

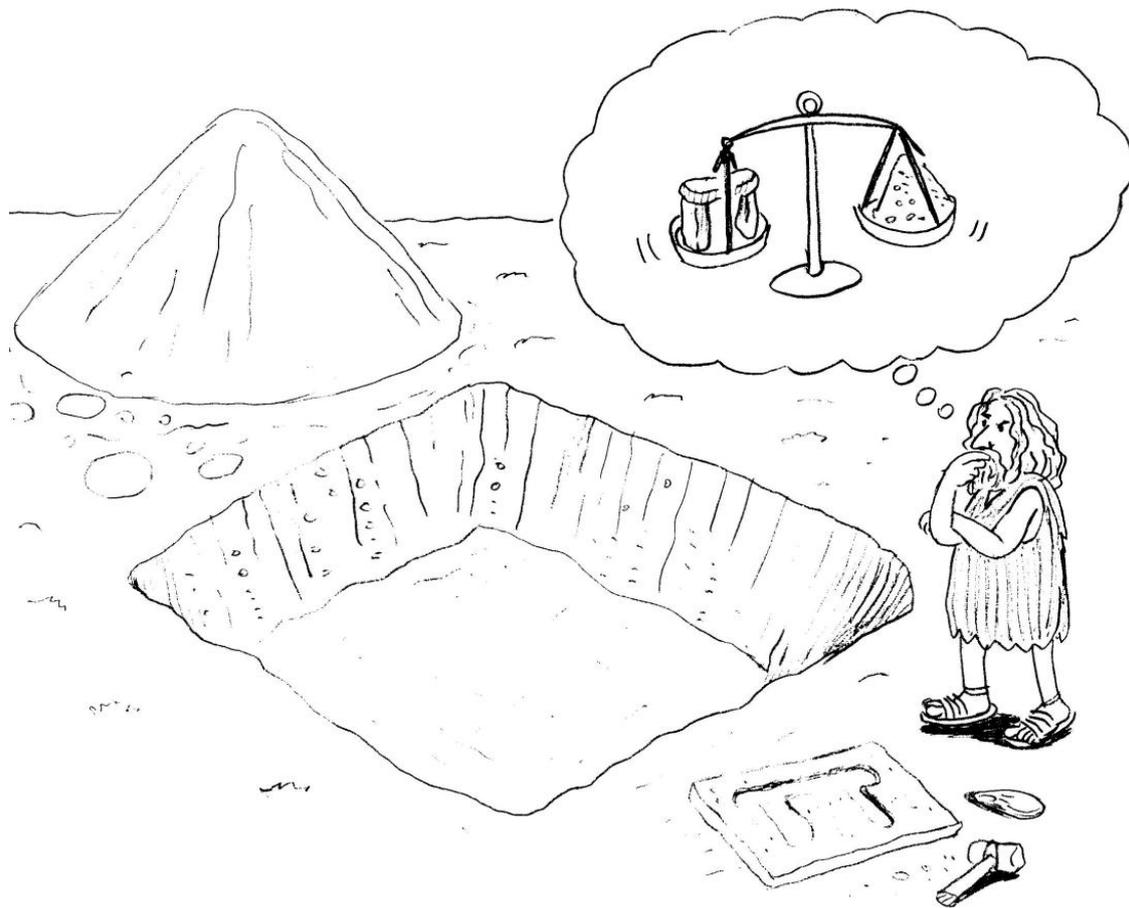


## ANEXO 3

**Conceitos básicos referentes à determinação da capacidade de carga de solos para dimensionamento de sapatas.**

BELL (1985), ao falar sobre solos e capacidade de carga, enfatiza que antes do advento dos métodos matemáticos e das técnicas de ensaios de laboratórios, o projeto de fundações se baseava totalmente na experiência com obras anteriores de características similares (ainda hoje se faz isso, embora se apliquem procedimentos adicionais, dado o maior conhecimento de solos).

Nas palavras do citado autor: “Nossos ancestrais não eram tolos, tendo percebido logo que, através da construção baseada em fundações profundas, o peso adicional da superestrutura seria bastante reduzido pela remoção da camada de solo sobrejacente àquela prevista para o apoio das fundações.”.



**Figura A3.1.** – Conceito intuitivo de capacidade de carga de um solo: um edifício de mesmo peso que o do material removido na escavação poderá ser suportado pelo solo.

O Código Civil Brasileiro reconhece as dificuldades associadas com as obras de fundações quando no seu Art. 625 diz que um empreiteiro poderá suspender uma obra “quando, no decorrer dos serviços, se manifestarem

dificuldades imprevisíveis de execução, resultantes de causas geológicas ou hídricas, ou outras semelhantes, de modo que torne a empreitada excessivamente onerosa, e o dono da obra se opuser ao reajuste do preço inerente ao projeto por ele elaborado, observados os preços;”

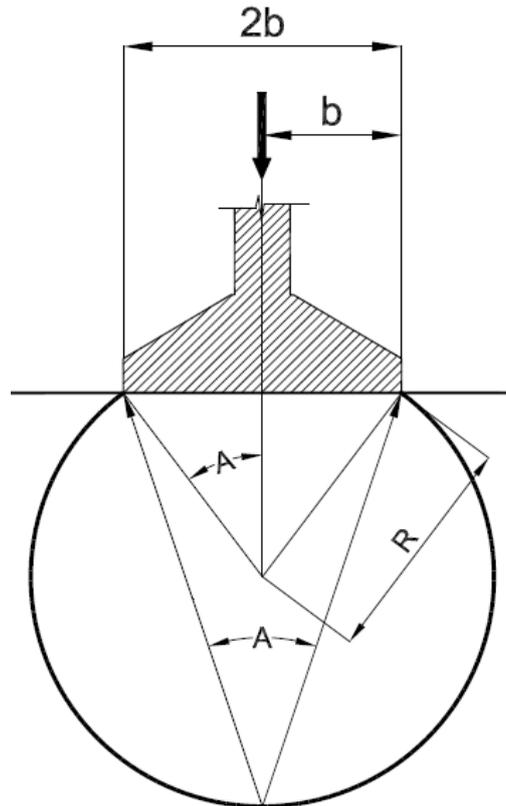
Está muito além dos objetivos deste trabalho discutir questões jurídicas. Procurou-se apenas chamar a atenção para o fato de que a sociedade é sensível às dificuldades que as fundações apresentam. Naturalmente, resta ainda discutir o que seriam “dificuldades imprevisíveis”. Mais importante ainda: está implícita a obrigação do acompanhamento da execução das fundações para que o empreiteiro possa ter o direito de suspender a obra, visto que a situação cita que tais dificuldades devem se manifestar no decorrer do serviço.

Dentre os estudos teóricos iniciais que constituem a base dos métodos de estimativa de capacidade de carga de solos, destaca-se o de Boussinesq, que em 1885, determinou matematicamente como as tensões se distribuem em um sólido elástico homogêneo de dimensões infinitas sob carregamento vertical. Esse estudo nos permite formar alguns conceitos úteis para o projeto de fundações rasas. A teoria de Boussinesq é bem mais simples quando aplicada a uma sapata corrida, caso que será visto agora.

Aplicando-se a teoria de Boussinesq, para uma sapata corrida, as tensões de cisalhamento dentro do maciço – que são as que geralmente governam a resistência dos solos – podem ser obtidas pela fórmula:

$$\tau = \frac{q \times \text{sen}(A)}{\pi}$$

Na expressão acima,  $q$  é a tensão sob a área da sapata, suposta uniforme, sendo, portanto, dada por  $N/(2b)$  onde  $N$  é a carga por unidade de comprimento. As demais definições para aplicação da fórmula dadas na Figura A3.2. O ângulo  $A$  é compreendido pela circunferência do círculo traçado a partir da largura da fundação, a qual constitui uma corda deste círculo. Por sua vez, este círculo é constituído pela ligação de todos os pontos que tem tensões iguais, e se traçarmos vários destes círculos, fazendo variar  $A$  tem-se uma visão geral da variação das tensões com a profundidade (Figura A2.1). Pode-se ver que, teoricamente, a uma profundidade da ordem de  $1,5b$  a tensão já assume valores bastante pequenos ( $0,625q/\pi \approx 0,2q$ ).



**Figura A3.2** – Figura auxiliar para aplicação da fórmula de Boussinesq para sapata corrida (BELL, 1985).

Os círculos representados na Figura A3.3 formam o que comumente se denomina bulbo de tensões. Esse conceito, advindo de solução dada pela Teoria da Elasticidade, é muito usado para visualizar a região do maciço que é mais solicitada pela carga. Em sapatas isoladas as tensões propagam-se pelo solo tridimensionalmente.

No dimensionamento da sapata é necessário que seja definido um valor admissível para  $q$ . Observa-se que, de maneira análoga ao que acontece quando se estuda a resistência de um prisma de concreto à compressão, o mecanismo de ruptura não é de fácil compressão. Porém, é muito simples associar a carga  $q$  à ruptura, pois esta carga pode ser calculada simplesmente dividindo a força atuante no pilar pela área da sapata – também poder-se-ia criticar essa simplificação, pois não se pode afirmar que a carga se distribui de maneira uniforme na interface entre o solo e a base da sapata, mas essa é uma discussão que está além dos nossos objetivos.

O bulbo de tensões serve ainda como indicação da profundidade do subsolo que deve ser investigada nos estudos preliminares que antecedem o projeto, e que geralmente é da ordem de 3x a maior dimensão da sapata. Além disso, verifica-se que em fundações muito próximas ocorre superposição das

tensões que se propagam no solo, o que deve ser levado em conta no projeto de fundações.

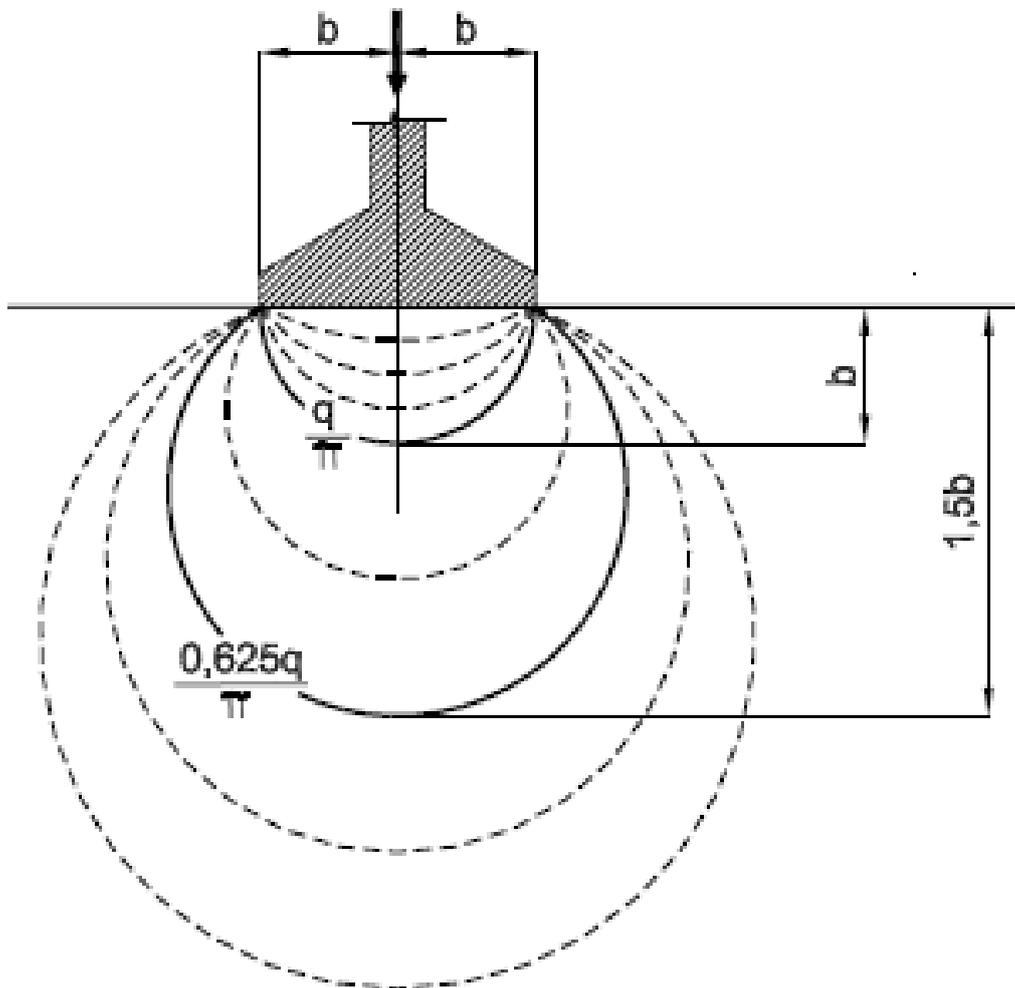


Figura A3.3 – Bulbo de tensões para uma sapata corrida (BELL, 1985).