Sobre os conceitos de Limite e continuidade

Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$

uma função definida num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $l \in \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D.

Definição: Dizemos que

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se os valores de $f(x, y)$ estão próximos de l quando (x, y) está convenientemente próximo de (x_0, y_0).

Em linguagem matemática:

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \longrightarrow |f(x, y) - l| < \epsilon$.

Se $(x_0, y_0) \in D$, dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que f é contínua.

Observação: Note que só tem sentido falar em continuidade da função em um ponto se tal ponto pertencer ao domínio da função.

Propriedades algébricas de limite

Teorema: Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = l_2.$$

Então:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = l_1 + l_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) + \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)$

(2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \lambda f(x, y) = \lambda l_1 = \lambda \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = l_1.l_2 = (\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)).(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y))$

(4) Se $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{1}{g(x, y)} = \dfrac{1}{l_2}$

(5) Se $l_2 \neq 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Se $(x_0, y_0) \in D$ e f e g são contínuas em (x_0, y_0) então

(1) $f + g$ é contínua em (x_0, y_0).

(2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, λf é contínua em (x_0, y_0).

(3) fg é contínua vem (x_0, y_0).

(4) Se $g(x_0, y_0) \neq 0$ então $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ são contínuas em (x_0, y_0).

Teorema: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis, e $g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longrightarrow g(u)$, definida num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \in I$, $\forall\ (x, y) \in D$.

Considere a função composta $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$.

Se f e g são funções contínuas então a função $g \circ f$ também é contínua.