Limite e continuidade de uma função

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

Limite de funções de duas variáveis

Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b).

Dizemos que o limite de $f(x, y)$, quando (x, y) tende a (a, b), é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$, tal que se $(x, y) \in D$ e

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ então } |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Considere o exemplo: 1- Seja f: A $\to$ R, dada por:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - x^2 y}{x - y}$$

Onde A = {(x, y) $\in R^2 / x \neq y$}

Limite de funções de duas variáveis

Para calcular o lim f(x, y), é preciso entender como é o comportamento desta expressão

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

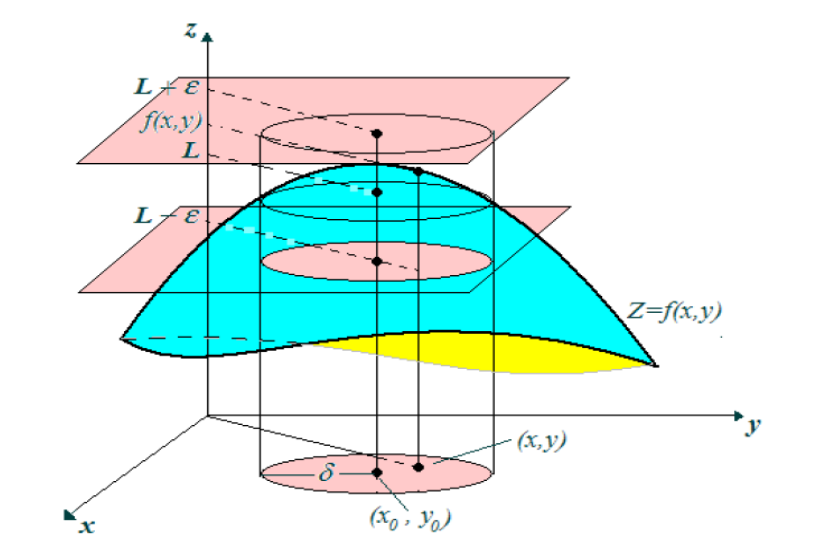


Figura 1

Limite de funções de duas variáveis

Teste dos diferentes caminhos para a não existência do limite

Assim, se acharmos dois caminhos diferentes de aproximação ao longo dos quais $f(x, y)$ tenha limites diferentes, segue então que $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Se $f(x, y) \to L_1$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \to L_2$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Limite de funções de duas variáveis

Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples porque porque existem infinitas maneiras de (x, y) se aproximar de (a, b) por uma quantidade infinita de direções de qualquer maneira que se queira

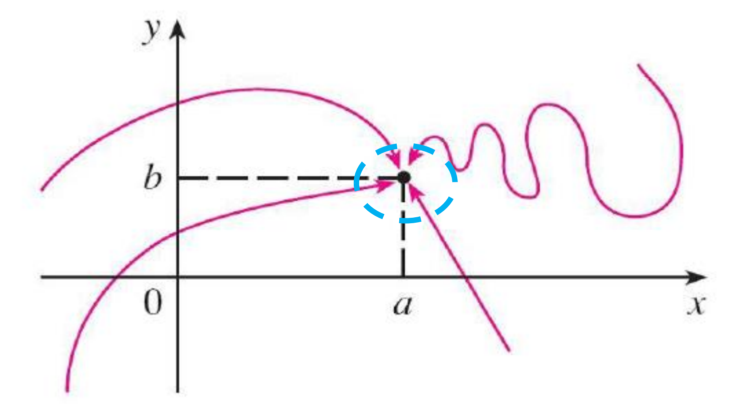
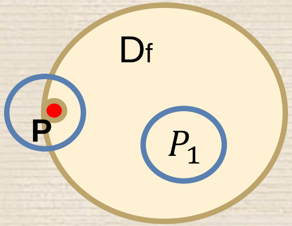


Figura 2

Ponto de Acumulação

Seja A$\subset R^n$ e $p_0 \in$A. Dizemos que p_0 é um ponto de acumulação de A se :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ B\ (p_0) \cap A \neq \{p_0\}\ e \neq \phi$$



Função Limitada

Uma função de duas variáveis f: A $\rightarrow$ R, onde A é um subconjunto de R^2, é limitada se existir um número real M tal que $|f(x, y)| \leq$ M, para todo (x,y) $\in$ A.

Exemplo: Verificar se f(x,y) = sen(x + 2y) é limitada, pois para qualquer par (x, y) $\in$ R^2, temos que $|sen(x + 2y)| \leq 1$.

Limite de funções de duas variáveis

O cálculo do limite de funções de duas variáveis pode ser simplificado, usando o **Teorema do Confronto** e as propriedades de limite.

Se $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ **para** $\left|\left|(x,y) - (x_0,y_0)\right|\right| < \epsilon, \epsilon > 0$ **e se**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

Limite de funções de duas variáveis

Teorema de Infinitésimo

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq M$ para $0 < ||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \epsilon$,

$tais\ que\ \epsilon, M > 0$, **então**

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \underbrace{f(x,y)}_{0}.\underbrace{g(x,y)}_{limitada} = 0$$

Continuidade de Função

Dizemos que a função $f(x, y)$ é contínua em um ponto (a, b) se, e somente se, são válidas as seguintes condições:

(i) $f(a, b)$ existe

(ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe

(iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

☞ Considerar (a, b) $\rightarrow (x_0, y_0)$