

## Capítulo 6

# Conceitos Matemáticos Fundamentais

*Neste capítulo, são apresentados conceitos fundamentais para o entendimento da Teoria de Controle  $H_\infty$ . Serão revistos conceitos de Álgebra Linear, Topologia Geral, Espaços Métricos, Espaços Normados e Teoria de Operadores Lineares.*

### 6.1 Fundamentos Matemáticos

Para se construir uma base mais rigorosa em teoria de sistemas lineares, é preciso que conceitos até agora interpretados de forma mais intuitiva sejam colocados em uma base matemática. Esta base é a álgebra linear, através dos conceitos de espaços vetoriais (de dimensão finita e infinita) e a análise funcional. Todo sinal que entra ou sai de um sistema de controle pode ser pensado como um elemento de um espaço vetorial (de dimensão infinita). Para que se possa definir o conceito de ganho de um sistema, entretanto, é necessário se introduzir uma forma de atribuir uma medida a um sinal, o que é feito através do conceito de norma. Da mesma forma, sistemas podem ser vistos como elementos de um espaço vetorial (também de dimensão infinita) e se pode atribuir uma norma (ganho) para estes. Segue-se então nas próximas subseções a apresentação destes conceitos formais.

### 6.2 Espaços de Banach

**Definição 6.2.1** (Espaço Vetorial Normado). *Dado um espaço vetorial  $V$  (de dimensão finita ou não), uma norma é uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que a cada vetor  $\mathbf{v} \in V$  associa um número real positivo e tal que:*

- $\|\mathbf{v}\| = 0$ , onde a igualdade só ocorre se  $\mathbf{v} = 0$ ;
- $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$  para qualquer par  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  (desigualdade triangular).

Um espaço vetorial munido de uma norma é conhecido como *espaço vetorial normado*. Exemplos de espaços vetoriais normados, de dimensão finita, são:

**Exemplo:**

- O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a norma definida por  $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$ , conhecido como *norma 2*, ou norma euclidiana;
- O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com a norma  $\|\mathbf{v}\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p}$  para qualquer  $p$  inteiro positivo, ou ainda  $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ , que é equivalente ao caso para  $p \rightarrow \infty$ ;
- Sendo  $\mathbb{C}^n$  igual ao produto cartesiano de  $n$  cópias do conjunto dos números complexos (ou seja, o espaço vetorial dos vetores complexos), podemos definir  $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \cdots + |u_n|^2} = \sqrt{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}$ , onde  $|u_i| = \sqrt{\bar{u}_i u_i}$  é o módulo do número complexo, e  $\mathbf{u}^\dagger = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{u}$  é o conjugado Hermitiano;
- De forma similar, pode-se definir  $\|\mathbf{u}\|_p$  para vetores complexos.

É sempre possível definir a distância  $d$  entre dois vetores em um espaço vetorial normado a partir da norma da seguinte forma:

$$d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|, \quad (6.1)$$

de maneira que todo espaço vetorial normado é um *espaço métrico*.

**Exemplo:** Para o caso de  $\mathbb{R}^2$ , tem-se que as bolas fechadas  $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$ ,  $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$  e  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  são representadas na Fig. 6.1. Neste caso, vê-se que para o vetor marrom na figura, tem-se que  $\|\mathbf{v}\|_\infty < \|\mathbf{v}\|_2 < 1 = \|\mathbf{v}\|_1$

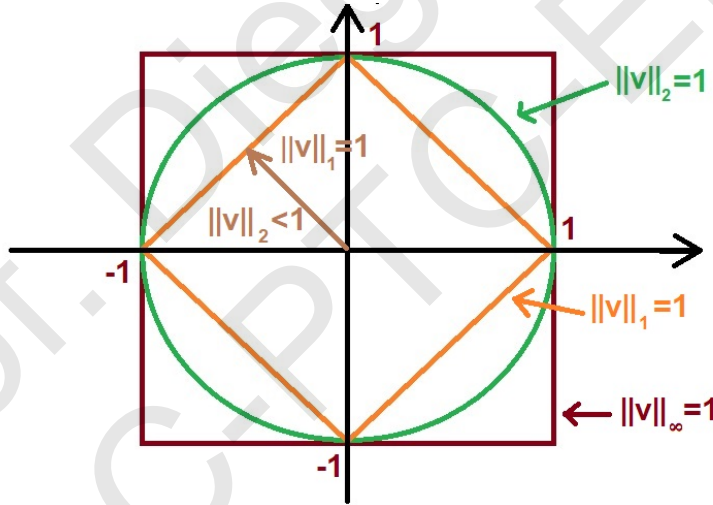


Figura 6.1: Normas dos vetores no plano

**Definição 6.2.2** (Sequência Convergente). *Dado um espaço vetorial normado  $(V, \|\cdot\|)$  e uma sequência  $\{\mathbf{v}_n\}$  de vetores neste espaço, diz-se que esta é convergente (e converge para o limite  $\mathbf{v} \in V$ ) se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| = 0$ .*

**Definição 6.2.3** (Sequência de Cauchy). *Diz-se que uma sequência  $\{\mathbf{v}_n\}$  é de Cauchy se  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\| = 0$ .*

Uma sequência de Cauchy nem sempre é convergente, apesar da distância entre os elementos sempre diminuir. É comum, em espaços de dimensão infinita, que uma sequência de Cauchy convirja para algo que não pertence ao espaço vetorial.

**Definição 6.2.4** (Espaço de Banach). *Por isso, diz-se que um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy for convergente. A todo espaço vetorial normado completo se dá também o nome de espaço de Banach.*

Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é de Banach, como os que foram vistos até agora. Os espaços vetoriais de dimensão infinita, por outro lado, são mais complexos. Ao contrário dos espaços de dimensão finita, nem todo espaço vetorial de dimensão infinita possui uma base contável a partir da qual qualquer elemento pode ser obtido por um combinação linear.

**Definição 6.2.5** (Espaços Separáveis). *Os espaços vetoriais  $V$  de dimensão infinita que possuem uma base contável são chamados de separáveis, isto é, possuem um subconjunto  $B$  contável e denso em  $V$ , de modo que qualquer elemento de  $V$  está infinitesimalmente próximo de algum elemento de  $B$ .*

**Exemplo:** O espaço vetorial das funções contínuas e limitadas em um intervalo limitado e fechado  $[a, b]$  com a norma  $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ , isto é,  $\mathcal{C}[a, b]$ , é um espaço separável. De fato, qualquer função contínua em um intervalo fechado pode ser uniformemente aproximada por um polinômio de coeficientes racionais, e o espaço dos polinômios com coeficientes racionais é contável (esse é o teorema da aproximação de Weierstrass).

Entretanto, costuma-se trabalhar em controle robusto com outras classes de funções que, mesmo não sendo contínuas, representam mais adequadamente os sinais.

**Exemplo:** O espaço vetorial das sequências  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  com norma dada por:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

que é representado por  $\ell_p[0, \infty)$ , onde  $1 \leq p < \infty$ , é um espaço de Banach, assim como o espaço  $\ell_\infty[0, \infty)$  das sequências cuja norma é  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_i |x_i|$ .

**Exemplo:** Se  $T \in \mathbb{R}$  é algum sub-intervalo fechado dos reais, define-se o espaço vetorial  $\mathcal{L}_p(T)$  das funções complexas cujo domínio é  $T$  e tal que:

$$\|f\|_p = \left( \int_T |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad (6.2)$$

Este espaço vetorial é normado com norma igual a  $\|f\|_p$ . No caso onde  $p = \infty$ , esta definição é modificada para:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in T} |f(t)|, \quad (6.3)$$

onde  $\text{ess sup}$  é o *supremo essencial*, que é o supremo da função a menos de um conjunto de medida nula (este conceito será melhor explicado mais adiante). Podemos dizer então que este último espaço é o das funções limitadas.

## 6.3 Espaços de Hilbert

**Definição 6.3.1** (Produto Interno). *Dado um espaço vetorial  $V$ , um produto interno é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:*

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ ;
- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  se e só se  $\mathbf{v} = 0$ ;
- $\langle \mathbf{u}, \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$ ;
- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$ .

Os espaços vetoriais munidos com um produto interno são chamados de *espaços com produto interno*, e generalizam o conceito de produto escalar.

**Definição 6.3.2** (Norma natural para produto interno). *Sempre podemos definir uma norma em um espaço deste tipo, que é:  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ .*

Diz-se que dois vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$  são ortogonais se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ . Neste caso, vale  $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$ .

**Definição 6.3.3** (Espaço de Hilbert). *Dado um espaço vetorial  $V$  com um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se este espaço for ainda um espaço de Banach (com a norma definida a partir do produto interno), diz-se que ele é um espaço de Hilbert.*

**Exemplo:** Alguns exemplos de espaços de Hilbert são:

- O espaço vetorial de dimensão finita  $\mathbb{C}^n$  tem produto interno dado por:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \bar{v}_1 u_1 + \bar{v}_2 u_2 + \cdots + \bar{v}_n u_n = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{u}$ ;
- O espaço vetorial de dimensão  $nm$  das matrizes complexas  $\mathbb{C}^{n \times m}$  com produto interno dado por  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(A^\dagger B)$ , onde  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  e onde  $\text{trace}(\cdots)$  é o *traço* de uma matriz, que consiste na somatória dos elementos do diagonal principal;
- O espaço vetorial de dimensão infinita  $\mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$  com o produto interno dado por  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt$ , que é também separável.
- O espaço vetorial das sequências  $\ell_2(-\infty, \infty)$  com produto interno dado por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{x}_i y_i$$

## 6.4 Matrizes e Valores Singulares

Espaço vetorial é o conceito mais básico em Álgebra Linear, e o leitor certamente está familiarizado com o espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, dos vetores com  $n$  componentes.

**Definição 6.4.1** (Transformação Linear). *Dados dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$ , uma transformação linear  $L : U \rightarrow V$  mapeia cada vetor de  $U$  em um vetor de  $V$ , ou seja,  $L(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ , e ainda satisfaz a propriedade de linearidade, isto é:*

- $L(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = L(\mathbf{u}_1) + L(\mathbf{u}_2)$  onde  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$
- $L(a\mathbf{u}) = aL(\mathbf{u})$ ,  $a \in \mathbb{R}$  são escalares.

Se  $V$  e  $U$  forem de dimensão finita ( $n$  e  $m$ , respectivamente), podemos achar bases para estes espaços e representar os vetores por suas coordenadas nesta base, ou seja, podemos trocar  $V$  por  $\mathbb{R}^n$  e  $U$  por  $\mathbb{R}^m$ . Uma transformação linear  $L : V \rightarrow U$  sempre terá então uma representação matricial, de maneira que podemos pensar em  $L$  como uma matriz  $n \times m$ , que é também elementos do espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

### 6.4.1 Matrizes Quadradas

No caso particular onde  $n = m$ , tem-se que a transformação linear mapeia vetores no mesmo espaço. Neste caso, podemos pensar que a matriz está causando uma transformação no vetor que muda seu comprimento e orientação.

**Exemplo:** Uma transformação linear  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  muda então o comprimento, a direção e o sentido de um vetor tridimensional, como ilustrado na Fig. 6.2a. Dado um vetor  $\mathbf{v}$ , se  $G$  não muda a sua direção, ou seja, se  $G(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ , dizemos que este é um *autovetor* de  $G$ , e  $\lambda$  é o correspondente *autovalor*;

Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  formam uma base para  $\mathbb{R}^3$ , podemos montar a matriz  $V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ , ou seja, a matriz quadrada de dimensão três cujas colunas são os vetores da base. Deste modo,  $LV$  representa a transformação dos três vetores da base ao mesmo tempo. Podemos pensar que  $V$  forma um paralelepípedo, e uma transformação linear qualquer pode mudar os tamanhos dos lados, os ângulos entre os lados, bem como a orientação espacial (mantendo sempre a origem, que é um dos vértices, fixa).

Dentre as transformações lineares/matrizes em  $\mathbb{R}^3$ , existe uma classe que mantém todos os ângulos entre os lados iguais (ou seja, noventa graus) e o comprimento dos lados iguais no paralelepípedo  $V$ . De fato, se fizermos o produto:

$$V^T V = V V^T$$

teremos que o elemento  $(i, j)$  da matriz será o produto escalar  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ . Em particular, temos:

**Definição 6.4.2** (Matrizes Ortogonais). *Uma matriz  $O$  tal que  $OO^T = O^T O = I$  representa uma transformação que, aplicada a uma base ortogonal de vetores unitários como a apresentada na Fig. 6.2b (em azul) a transforma em uma base igualmente ortogonal de vetores unitários. Essas matrizes são chamadas de matrizes ortogonais.*

De fato, se  $E = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ , temos que  $EE^T = I$ , de modo que a transformação que preserva os comprimentos unitários e ângulos retos devem ser tal que  $OE(OE)^T = OEE^T O^T = OO^T = I$ . Tem-se também que  $\det(O) = \pm 1$ . É possível mostrar que as matrizes ortogonais, quando munidas da multiplicação tradicional de matrizes, formam um *grupo de Lie*, conhecido como  $O(3)$ . Essa propriedade é importante porque quando uma transformação pertence a um grupo, ela sempre possui inversa.

**Definição 6.4.3** (Matrizes de Rotação). *As matrizes ortogonais tais que  $\det(O) = 1$  são conhecidas como matrizes de rotação, que nos casos  $n = 3$  representam rotações físicas do paralelepípedo.*

O conjunto das matrizes de rotação, munido com a multiplicação, forma um grupo de Lie  $SO(3)$ , que é um subgrupo de  $O(3)$ . É interessante o leitor pensar no efeito causado sobre o paralelepípedo por transformações ortogonais tais que  $\det(O) = -1$ .

Se  $G$  for uma matriz qualquer em  $\mathbb{R}^{n \times n}$  e fizermos  $GE$  (na base ortogonal), se  $\det(G) = 0$ , então o conjunto de vetores transformados passa a ser linearmente dependente e não mais forma uma base. Se  $\det(G) \neq 0$ , os comprimentos e ângulos mudam, mas continua sendo uma base.

### 6.4.2 Matrizes Retangulares

Para  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , não se pode definir determinante e nem inversa. Uma base no espaço de partida pode até ser mapeada em uma base, mas essa base pode não ser mapeada de volta a uma base. De fato, se  $G : V \rightarrow W$ , então:

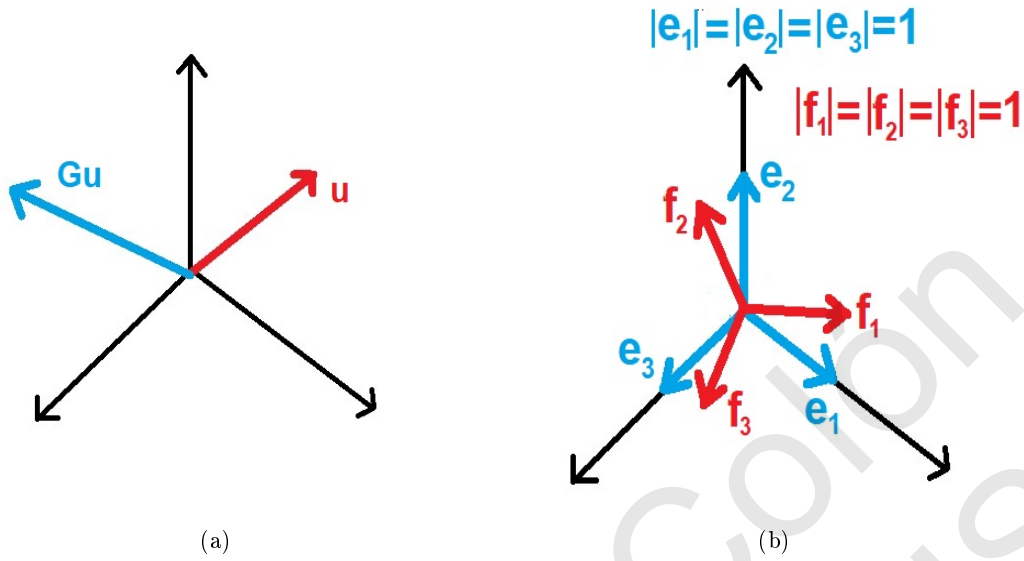


Figura 6.2: (a) Transformação Linear (b) Transformação Ortogonal.

$$\dim V = \dim \ker G + \dim \operatorname{Im} G$$

**Teorema 6.4.1.** *Se  $G$  é uma matriz simétrica real, então:*

1. *Todos os seus autovalores são reais;*
2. *Para dois autovalores distintos, tem-se que os correspondentes autovetores são ortogonais;*
3.  *$G$  é diagonalizável por uma transformação de semelhança cuja matriz é ortogonal, isto é:*

$$P^{-1}GP = P^TGP = \Xi$$

onde  $\Xi = \operatorname{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Definição 6.4.4** (Matriz Definida Positiva e Semi-definida Positiva). *Uma matriz real é definida positiva se todos os seus autovalores forem reais e positivos. Ela é semi-definida positiva se todos os seus autovalores forem positivos ou nulos.*

### 6.4.3 Decomposição em Valores Singulares

As matrizes  $G^T G$  e  $GG^T$  são simétricas. Neste caso, para autovalores distintos, tem-se que os autovetores são ortogonais.

**Teorema 6.4.2.** *As matrizes  $G^T G$  e  $GG^T$  são semi-definidas positivas.*

*Demonstração.* Se  $V = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$  é a matriz formada por uma base de autovetores, tem-se que  $G^T G V = \Lambda V$ , onde  $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é a matriz diagonal dos autovalores. Como  $V$  é ortogonal, então:

$$\begin{aligned} W^T W &= V^T G^T G V = V^T [G^T G \mathbf{v}_1 \dots G^T G \mathbf{v}_n] = \\ &= V^T [\lambda_1 \mathbf{v}_1 \dots \lambda_n \mathbf{v}_n] = \operatorname{diag}(\lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|_2^2, \dots, \lambda_n \|\mathbf{v}_n\|_2^2) = \operatorname{diag}(\|w_1\|_2^2, \dots, \|w_n\|_2^2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como  $\|v_i\| > 0$  sempre, então  $\lambda_i = \|w_i\|^2 / \|v_i\|^2 \geq 0$ . ■

**Teorema 6.4.3** (Decomposição em Valores Singulares). *Uma matriz real  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pode ser escrita como:*

$$G = U\Sigma V^T, \quad (6.5)$$

onde  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$  e  $U$  e  $V$  são matrizes ortogonais de dimensões apropriadas. Esta fórmula é conhecida como decomposição em valores singulares.

*Demonstração.* Como  $V^T G^T G V = V^T \Lambda V = V^T G^T G V = V^T V \Lambda$  e como essas duas últimas matrizes são diagonais, temos que  $GV$  é ortogonal, porém os tamanhos dos vetores podem não ser unitários. Deste modo, podemos achar uma matriz ortogonal  $U = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n]$  de vetores coluna com módulo um que forma uma base do espaço de chegada, de modo que  $GV = U\Sigma$ , onde  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , ou ainda

$$G = U\Sigma V^T, \quad (6.6)$$

onde  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Pode-se ainda fazer uma transformação de coordenadas de forma que o elemento na diagonal principal da esquerda é sempre maior que os seus vizinhos da direita, ou seja:  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ . ■

Pode-se dizer ainda que a base ortogonal de entrada  $V$  é transformada num conjunto de vetores de saída  $U\Sigma$  que também é ortogonal, porém os vetores não são unitários.

**Definição 6.4.5** (Direções de Ganho Máximo e Mínimo). *A primeira coluna de  $V$ , ou seja  $\mathbf{v}_1$  sempre será a direção de entrada de ganho máximo, cujo correspondente ganho é o maior valor singular, ou seja,  $\bar{\sigma} = \sigma_1$ . A essa direção de entrada corresponde a direção de saída de ganho máximo, que é a primeira coluna de  $U$ , ou seja,  $\mathbf{u}$ . A última coluna de  $V$ , ou seja  $\mathbf{v}_n$  sempre será a direção de ganho mínimo de entrada, cujo correspondente ganho é o menor valor singular, ou seja,  $\underline{\sigma} = \sigma_n$ . A correspondente direção de saída de ganho mínimo é a última coluna de  $U$ , ou seja,  $\mathbf{u}_m$ .*

**Corolário 6.4.1.** *Os valores singulares  $\sigma_i$  são dados por:*

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

onde  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $G^T G = G G^T$ .

*Demonstração.* Vimos que  $V^T G^T G V = V^T V \Lambda = \Lambda$  e  $V^T G^T G V = (U\Sigma)^T (U\Sigma) = \Sigma^T U^T U \Sigma = \Sigma^T \Sigma$ , de modo que  $\Lambda = \Sigma^T \Sigma$ . Como  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , o resultado segue. ■

No caso de  $G$  ser uma matriz quadrada, temos que  $V, U$  e  $\Sigma$  também o são. Deste modo, podemos pensar que  $G$  a ação de  $G$  transforma a base  $V$  em uma base  $U$  com os vetores desta última tendo os comprimentos alterados segundo os ganhos de cada direção.

**Exemplo:** Para o caso de  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ou seja,  $G$  quadrada de dimensão dois, dado que  $\mathbf{w}$  é um vetor no domínio (de entrada), temos que

$$\mathbf{w} = V[w_1 \ w_2]^T$$

onde  $w_1^2 + w_2^2 = 1$ . Deste modo:

$$GV[w_1 \ w_2]^T = U\Sigma[w_1 \ w_2]^T = U[\bar{\sigma}w_1 \ \underline{\sigma}w_2]^T = \underbrace{\bar{\sigma}w_1}_{\beta_1} \mathbf{u}_1 + \underbrace{\underline{\sigma}w_2}_{\beta_2} \mathbf{u}_2$$

Se elevarmos ao quadrado  $\beta_1$  e  $\beta_2$  e usarmos  $w_1^2 + w_2^2 = 1$ , chegaremos à identidade:

$$\left(\frac{\beta_1}{\bar{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2}{\underline{\sigma}}\right)^2 = 1$$

o que indica que o conjunto dos vetores de comprimento um no espaço de entrada é transformado em uma elipse no espaço de chegada. Na Fig. 6.3, tem-se uma representação da transformação  $G$  e as direções de ganho máximo e mínimo. Neste caso, claramente temos que  $1 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma}$ .

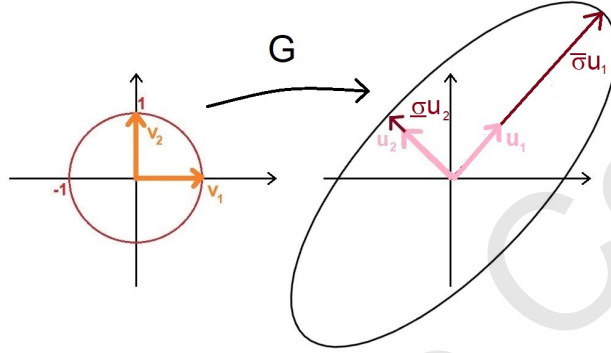


Figura 6.3: Transformação Linear e Valores Singulares

#### 6.4.4 Matrizes Complexas

No caso de interesse para controle robusto, a matriz  $G$  será complexa e função da frequência  $\omega$ , ou seja,  $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Matrizes deste tipo são transformações  $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , ou seja, mapeiam vetores complexos em vetores complexos. Tais vetores têm parte real e parte imaginária, de modo que a dimensão dos espaços de vetores complexos é o dobro dos correspondentes espaços de vetores reais. Entretanto, em vez de bases ortogonais, as bases deverão ser unitárias, ou seja,  $VV^\dagger = UU^\dagger = I$ , onde  $(\cdot)^\dagger$  representa o *conjugado Hermitiano*, que é o conjugado (complexo) da matriz transposta.

**Teorema 6.4.4.** *Seja  $G \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Então existem matrizes unitárias  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tais que:*

$$G = U\Sigma V^\dagger. \quad (6.7)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  e  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ , com  $p \in \min\{m, n\}$ .

Podemos encarar uma matriz complexa como um sistema que transforma vetores de entrada em vetores de saída, mudando direção, módulo e fase.

**Exemplo:** Seja a matriz de funções de transferência representando um sistema com duas entradas e duas saídas:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.188}{s^2 + 6.973s + 2.021} & 0 \\ \frac{-0.04673s^2 - 1.007s + 11.63}{s^4 + 13.81s^3 + 53.41s^2 + 65.71s + 7.14} & \frac{-1.062s + 8.846}{s^2 + 10.83s + 20.82} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Usando-se a função **sigma** do MATLAB, é obtém-se o gráfico dos valores singulares em função da frequência, conforme apresentado na Fig. 6.4.

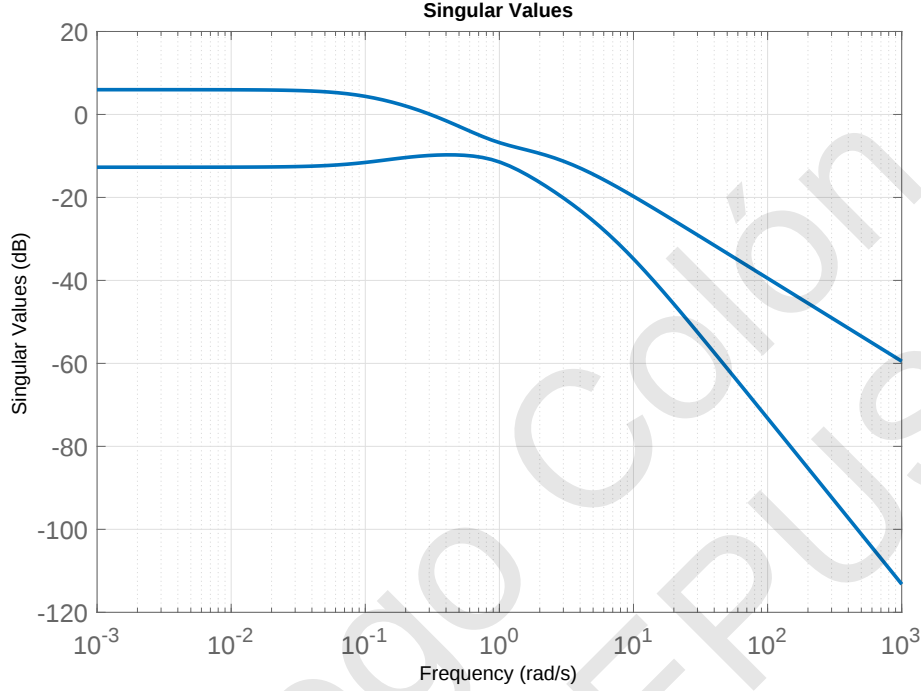


Figura 6.4: Valores Singulares da Matriz de  $G(j\omega)$

onde o eixo das frequências está em escala logarítmica, e o eixo vertical está em decibéis.

#### 6.4.5 Normas de Matrizes

Uma norma de matriz é uma norma de espaço vetorial tal que, além de satisfazer as propriedades de norma qualquer norma, ainda satisfazem:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

**Exemplo:** Dada uma matriz, para uma matriz complexa  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , podemos definir a *norma de Frobenius* como sendo:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^\dagger A)}$$

Há várias formas de se definir normas de matrizes, entretanto, as que têm interesse aqui são as chamadas:

**Definição 6.4.6** (Normas Induzidas). *Dada um matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , uma norma induzida é uma norma definida a partir das normas de vetores (de entrada e saída)  $\|\cdot\|_p$  pela fórmula:*

$$\|G\|_p = \max_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|_p}{\|u\|_p} = \max_{\|u\|_p=1} \|Gu\|_p, \quad (6.9)$$

Ou seja, trata-se do ganho máximo que a matriz pode dar, o que ocorre para um específico vetor de entrada não-nulo, que precisa ser determinado pela otimização.

Alguns casos específicos serão bastante usados, como:

- Para  $p = 2$ , tem-se que  $\|G\|_2 = \bar{\sigma}(G)$ , ou seja, o valor singular máximo é uma norma de matrizes;
- Para  $p = 1$ , tem-se  $\|G\|_1 = \max_j(\sum_i |G_{ij}|)$
- Para  $p = \infty$ , tem-se  $\|G\|_\infty = \max_i(\sum_j |G_{ij}|)$

Como o espaço das matrizes possui multiplicação, este é na verdade uma *álgebra associativa* (mais especificamente, uma *álgebra de Banach*) [DP13]. Os seguintes resultados são válidos:

- $\|GH\|_p \leq \|G\|_p \|H\|_p$ ;
- $\|Gu\|_p \leq \|G\|_p \|u\|_p$ .

## 6.5 Espaços de Sinais Escalares

Antes de introduzir estes espaços, é importante informar que sinais que diferem em um conjunto de pontos de medida nula (ou seja, que não fazem diferença no valor da integral) são todos considerados o mesmo sinal (ou de forma mais rigorosa, pertencem a uma classe de equivalência de sinais para os para a qual a integral é igual)

Os seguintes espaços de sinais são importantes para controle  $H_\infty$ :

1.  $L_1(-\infty, +\infty)$  é o espaço vetorial normado de dimensão infinita da classe de equivalência dos sinais tais que:

$$\|s\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

2.  $L_2(-\infty, +\infty)$  é o espaço vetorial normado de dimensão infinita (da classe de equivalência) dos sinais tais que:

$$\|s\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} < \infty$$

3.  $L_\infty(-\infty, +\infty)$  é o espaço vetorial normado de dimensão infinita (da classe de equivalência) dos sinais tais que:

$$\|s\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} |s(t)| < \infty$$

onde o supremo essencial é o mesmo para sinais que diferem somente em um conjunto de medida nula.

**Definição 6.5.1** (Potência de um Sinal). *Dado um sinal  $s(t)$ , define-se a potência de um sinal por:*

$$\text{Pot}(s) = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt}$$

É importante frisar que  $\text{Pot}(s)$  não é uma norma. Algumas propriedades importantes dos espaços de sinais escalares são:

1. Se  $\|s\|_2 < \infty$  então  $\text{Pot}(s) = 0$ , o que define os chamados *sinais de energia*;
2.  $\|s\|_2 = \infty$  e  $\text{Pot}(s) < \infty$  definem os chamados *sinais de potência*;
3.  $\|s\|_1 < \infty$  e  $\|s\|_\infty < \infty$ , então  $\|s\|_2 \leq \sqrt{\|s\|_\infty \|s\|_1} < \infty$ .

Podemos organizar os espaços de sinais como na Fig. 6.5

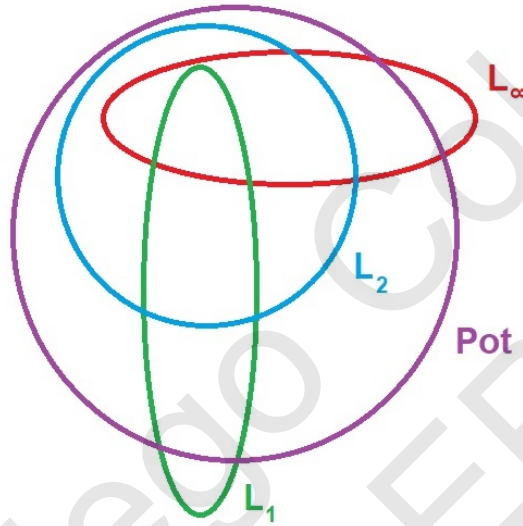


Figura 6.5: Intersecções dos Espaços de Sinais Escalares

As funções/sinais nestes espaços não são contínuas em geral, mas muitos sinais práticos apresentam estas propriedades. Os espaços  $\mathcal{L}_p(T)$  são espaços de Banach e, para  $p < \infty$ , eles também são separáveis.

**Exemplo:** O sinal  $s(t) = (1 - e^{-t})H(t)$ , onde  $H(t)$  é o degrau, é tal que  $\|s\|_1 = \infty$ ,  $\|s\|_2 = \infty$  e  $\|s\|_\infty = 1$

**Exemplo:** O sinal:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}(H(t) - H(t-1))$$

é tal que  $\|s\|_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$  e todas as demais são  $\infty$  (inclusive  $\text{Pot}(s)$ ).

## 6.6 Espaços de Sistemas SISO

Se considerarmos que um sistema LIT SISO é um bloco que transforma um sinal de entrada  $u : T \rightarrow \mathbb{R}$  em um sinal de saída  $y : T \rightarrow \mathbb{R}$ , este deve ser pensado como um operador linear  $G : L_p(-\infty, +\infty) \rightarrow L_r(-\infty, +\infty)$  que, a princípio, também pertence a um espaço vetorial de dimensão infinita. De fato, sabemos que a relação entre entrada e saída em um sistema LIT é dada pela *convolução*:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)u(\tau) d\tau = g \star u, \quad (6.10)$$

de modo que podemos pensar que a convolução de  $g(t)$  (resposta ao impulso do sistema) com o sinal de entrada  $u(t)$  corresponde a uma transformação linear  $G$ . Como  $g(t)$  também é um sinal, o espaço dos sistemas LIT é também de dimensão infinita.

Podemos então definir as normas de sistemas da seguinte forma:

**Definição 6.6.1** (Ganho de Pico). *A norma-1 de um sistema LIT SISO é uma norma induzida que pode ser definida como:*

$$\|G\|_1 = \sup_{0 < \|u\|_\infty < \infty} \frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$$

e uma consequência desta definição é que  $\|y\|_\infty \leq \|G\|_1 \|u\|_\infty$ , ou seja,  $\|G\|_1$  pode ser pensada como um ganho de pico.

**Definição 6.6.2.** *A norma-2 de um sistema LIT SISO pode ser definida como:*

$$\|G\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}$$

pelo teorema de Parseval.

É possível mostrar que  $\|y\|_\infty \leq \|G\|_2 \|u\|_2$ .

**Definição 6.6.3** (Ganho de Energia). *A norma- $\infty$  de um sistema LIT SISO pode ser definida como:*

$$\|G\|_\infty = \sup_{0 < \|u\|_2 < \infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \text{ess sup}_\omega |G(j\omega)|$$

Pode-se mostrar também que  $\text{Pot}(y) \leq \|G\|_\infty \text{Pot}(u)$

## 6.7 Computação de Normas

Dado que um sistema com matriz de funções de transferência  $G(s)$  possui uma realização em espaço de estados dada pelas matrizes  $A, B, C$  (a matriz  $D$  deve ser nula para que a norma-2 seja finita) e sendo:

$$L = \int_0^\infty e^{tA} B B^T e^{tA^T} dt \quad (6.11)$$

o Gramiano de controlabilidade, que satisfaz a equação matricial:

$$AL + LA^T + BB^T = 0 \quad (6.12)$$

então, pode-se calcular a norma-2 por:

$$\|G\|_2 = \sqrt{CLC^T} \quad (6.13)$$

Deste modo, basta resolver a equação (6.13), que é linear, para encontrar  $L$  (para as quais existem algoritmos eficientes) e calcular (6.13).

Para o caso da norma- $\infty$ , não há fórmulas explícitas nem algébricas para seu cálculo, o que exige um processo de busca.

Considerando  $D = 0$ , seja:

**Definição 6.7.1** (Matriz Hamiltoniana). *Dado um sistema LIT  $G$  com representação em espaço de estados  $(A, B, C)$ , definimos a matriz Hamiltoniana como sendo:*

$$H = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

Deste modo, para se achar o valor de  $\|G\|_\infty$ , necessita-se do seguinte:

**Teorema 6.7.1.**  $\|G\|_\infty < 1$  se e só se  $H$  não tem autovalores no eixo imaginário.

Deste modo, para saber se  $\|G\|_\infty < \gamma$ , basta calcularmos os autovalores de:

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ -\gamma^2 C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

**Exemplo:** Se queremos saber se  $\|G\|_\infty < 2$ , calcule  $H_2$ . Se não houver autovalores no eixo imaginário, então é verdade que  $0 < \|G\|_\infty < 2$ . Se queremos saber se  $1 < \|G\|_\infty < 2$ , temos que verificar se  $\|G\|_\infty < 1$ , calculando os autovalores de  $H_1$ . Se algum autovalor estiver no eixo imaginário, então temos que  $1 < \|G\|_\infty < 2$  e assim por diante.

## 6.8 Normas de Sinais Vetoriais

O espaço  $L_p^n(-\infty, \infty)$ , que é um espaço de Banach, é o espaço dos sinais com valores vetoriais da forma:

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_n(t)]^T$$

com a norma:

$$\|s\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|s(t)\|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

finita, onde  $1 \leq p < \infty$ , onde  $\|s(t)\|_p$  é a norma do vetor  $s(t)$  para  $t$  fixo, isto é:

$$\|s(t)\|_p = (|s_1(t)|^p + |s_2(t)|^p + \cdots + |s_n(t)|^p)^{\frac{1}{p}} \neq \|s\|_p$$

Há ainda as funções/sinais com valores vetoriais, isto é,  $\mathbf{f} : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , de modo que este pode ser pensado como um vetor de  $n$  funções. No caso onde  $p = \infty$ , esta definição é modificada para:

$$\|\mathbf{s}\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in T} \|\mathbf{s}(t)\|_\infty. \quad (6.14)$$

De especial interesse são os sinais vetoriais  $L_1^n(-\infty, \infty)$ ,  $L_2^n(-\infty, \infty)$  e  $L_\infty^n(-\infty, \infty)$

## 6.9 Espaços de Sistemas MIMO

Se considerarmos que um sistema LIT MIMO é um bloco que transforma um sinal de entrada  $\mathbf{u} : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^m$  em um sinal de saída  $\mathbf{y} : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , devemos representar este sistema como uma *transformação linear* entre dois espaços vetoriais, ou seja,  $G : L_p^m[-\infty, +\infty] \rightarrow L_r^n[-\infty, +\infty]$ . Sabemos, da álgebra linear, que transformações lineares entre espaços de dimensão finita são representados por matrizes, e que as matrizes de um determinado tamanho também pertencem a espaços vetoriais. Como os espaços vetoriais de sinais  $L_p^n[-\infty, +\infty]$  têm dimensão infinita, é razoável supor que os sistemas LIT (que são transformações lineares) também pertençam a espaços vetoriais de dimensão

infinita. De fato, sabemos que a relação entre entrada e saída em um sistema LIT é dada pela *convolução*:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^\infty G(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = G \star \mathbf{u}, \quad (6.15)$$

de modo que podemos pensar que a convolução de  $G(t)$  (resposta ao impulso do sistema, que é uma função com valores matriciais) com o sinal de entrada  $\mathbf{u}(t)$  corresponde a uma transformação linear  $L$ . Como  $G(t)$  também é um sinal, o espaço dos sistemas LIT é também de dimensão infinita.

Para definir as duas normas mais importantes para controle robusto, precisamos falar dos espaços:

- $L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$ : espaço de Hilbert das matrizes de funções de transferência  $n \times m$ , que têm produto interno:

$$\langle F, G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{trace}(F^\dagger(j\omega)G(j\omega)) d\omega, \quad (6.16)$$

e cuja norma é então:

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{trace}(F^\dagger(j\omega)F(j\omega)) d\omega}. \quad (6.17)$$

Para que esta norma seja finita, é necessário que as funções de transferência sejam estritamente próprias.

- O espaço  $RL_2^{n,m}(j\mathbb{R}) \subset L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$  é o subespaço das matrizes de funções racionais estritamente próprias e que não tem pólos em  $j\mathbb{R}$ .
- $L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$ , que é o espaço de Banach das matrizes de funções de transferência  $G(j\omega)$  com norma:

$$\|F\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(j\omega)). \quad (6.18)$$

- O espaço  $RL_\infty^{n,m}(j\mathbb{R}) \subset L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$  é o espaço das matrizes de funções de transferência racionais e próprias e que não tem pólos em  $j\mathbb{R}$ .

## 6.10 Espaços de Hardy $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Para definir os chamados espaços de Hardy, é necessário apresentar o conceito de:

**Definição 6.10.1** (Função Analítica). *Uma função  $f : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica em  $z_0 \in S$  se  $f$  for diferenciável em  $z_0$  e em alguma vizinhança deste ponto. Ela é analítica em  $S$  se for analítica em todos os pontos de  $S$ .*

Uma função analítica em  $S$  pode ser representada unicamente por série de Taylor em  $S$ . Da mesma forma, uma matriz de funções complexas  $F : S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times m}$  é analítica se todas as funções componentes  $F_{ij}(s)$  forem analíticas.

**Teorema 6.10.1** (Teorema do Módulo Máximo). *Se  $f(s)$  é uma função analítica não constante em um conjunto aberto e conexo  $S \subset \mathbb{C}$ , então  $|f(s)|$  não pode ter um máximo em  $S$ :*

Este teorema é importante para nós porque as funções de transferência estáveis são analíticas no semiplano direito aberto. Deste modo, o teorema garante que o máximo do módulo destas funções não pode ser no semiplano direito aberto.

Entretanto, os sistemas que estamos interessados fazem parte de subespaços. Mais especificamente, estamos interessados nos chamados *espaços de Hardy*:

- $\mathcal{H}_2 \subset L_2^{n,m}(j\mathbb{R})$ , que é o espaço das matrizes de funções de transferência que são analíticas no semiplano direito e tal que  $\|F\|_2 < \infty$ . O subespaço  $\mathcal{RH}_2 \subset \mathcal{H}_2$  é o das matrizes de funções de transferência racionais, estritamente próprias e analíticas no semiplano direito.
- $\mathcal{H}_\infty \subset L_\infty^{n,m}(j\mathbb{R})$  é o espaço das matrizes de funções de transferência analíticas no semiplano direito e limitadas em  $j\mathbb{R}$ . O subespaço  $\mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$  é o espaço das matrizes de funções de transferência analíticas no semiplano direito, racionais e próprias (não necessariamente estritamente próprias).

Finalmente, cabe destacar algumas propriedades:

1. O espaço  $\mathcal{RH}_\infty$  é fechado por multiplicação por escalar, soma e produto.
2. A norma  $H_\infty$  do sistema  $F(s)$  vale:

$$\|F\|_\infty = \sup_{0 < \|\mathbf{u}\|_2 < \infty} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}, \quad (6.19)$$

ou seja, esta norma representa o ganho máximo de energia do sinal (que ocorre para alguma direção).

Prof. Diego Colón  
LAC-PTC-EPUSP

# Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the  $\mu$ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.

- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.