Aula de Exercícios

"João" Pedro Saito

IME-USP

October 16, 2020

Exercício 4 - Lista 7 Extra

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição binomial de parâmetros n e p_n, $0 < p_n < 1$, onde $(p_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} n.p_n = \lambda$, $\lambda > 0$. Mostre que X_n converge em distribuição para uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ.

Exercício 4 - Lista 7 Extra

Solução
Usaremos o resultado:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

onde X é o limite em distribuição a ser determinado.

Temos

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

Exercício 4 - Lista 7 Extra

$$P(X_n = k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!n^k} n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}...\frac{(n-(k-1))}{n}\frac{1}{k!}(n.p_n)^k(1-\frac{np_n}{n})^{n-k}$$

Observe que as k primeiras parcelas da expressão tendem a 1 quando $n \to \infty$.

Considerando que $\lim_{n\to\infty} n.p_n = \lambda$, como $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$, e já que $n >> k$, quando $n \to \infty$ concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(X = k)$$

e, portanto $X_n \xrightarrow{D} X \sim Pois(\lambda)$.

Exercício 1 - Lista 8 Extra

Qual a distribuição da variável aleatória X se X tem função característica $\varphi(t) = \cos^2 t$?

Exercício 1 - Lista 8 Extra

Solução

Basta observar que:

$$\varphi(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}\cos(0t) + \frac{1}{2}\cos(2t) =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(0t) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})\cos(2t) = \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) =$$
$$\frac{1}{2}\cos(0t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(-2t) = E[\cos(Xt)]$$

e concluir que

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$
$$P(X = -2) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Exercício 3 - Lista 8 Extra

3)Seja X_n uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_n(t) = \frac{n}{2(n-1)} 1_{(-1, \frac{-1}{n})}(x) + \frac{n}{2(n-1)} 1_{(\frac{1}{n}, 1)}(x).$$

a) Obtenha a função característica de X_n, $\varphi_n(t)$.
b) Calcule $\lim \varphi_n(t)$. O limite é uma função característica? Justifique.

Exercício 3 - Lista 8 Extra

Solução

A função característica de X_n é

$$\varphi_n(t) = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \frac{n}{2(n-1)} e^{itx} dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{n}{2(n-1)} e^{itx} dx =$$

$$\frac{n}{2(n-1)} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} e^{itx} dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{itx} dx \right)$$

$$\frac{n}{(n-1)t} [\sin t - \sin(\frac{t}{n})]$$

é possível reagrupar os termos adequadamente para concluir esta última expressão (senos e cossenos com números complexos).

Exercício 3 - Lista 8 Extra

No limite temos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n-1)t}[\sin t - \sin(\frac{t}{n})] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\frac{\sin t}{t} - \frac{1}{n-1}\frac{\sin(\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}} = 1.\frac{\sin t}{t} - 0.1 = \frac{\sin t}{t}$$

Utilizamos um dos limites fundamentais do Cálculo e limites básicos.

Exercício 3 - Lista 8 Extra

Sabemos que $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Contudo $\frac{\sin t}{t}$ não está definida exatamente no ponto t $= 0$, o que viola a propriedade P1 (que diz $\varphi(0) = 1$).

Portanto, φ não é função característica.

Exercício 3 - Lista 9 Extra

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, com $\theta > 0$. Prove que

$$\sqrt{n}(\ln 2\bar{X}_n - \ln \theta) \xrightarrow{D} N(0, \frac{1}{3})$$

Exercício 3 - Lista 9 Extra

Resultado útil: Método Delta Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$$

Se g é uma função derivável no ponto μ, então

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2[g'(\mu)]^2)$$

(Prova: ver Barry James)

Exercício 3 - Lista 9 Extra

Observe que $E[X_n] = \frac{\theta}{2} < \infty$ e que $var(X_n) = \frac{\theta^2}{12} < \infty$.
Como os X_n são i.i.d, temos

$$E[\bar{X}_n] = E[X_1] = \frac{\theta}{2}$$

$$var(\bar{X}_n) = \frac{var(X_1)}{n} = \frac{\theta^2}{12n}$$

Exercício 3 - Lista 9 Extra

Usando o Teorema Limite Central (TLC), temos que

$$\frac{\bar{X}_n - \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2\sqrt{3n}}} = \sqrt{3n}(\frac{2\bar{X}_n}{\theta} - 1) \xrightarrow{D} Z \sim N(0,1)$$

Multiplicando a variável padronizada por $\frac{1}{\sqrt{3}}$, temos

$$\sqrt{n}(\frac{2\bar{X}_n}{\theta} - 1) \xrightarrow{D} N(0, \frac{1}{3})$$

Exercício 3 - Lista 9 Extra

Já que função $g(x) = ln(x)$ é derivável em x (claro: $g'(x) = \frac{1}{x}$), pelo Método Delta, concluímos que

$$\sqrt{n}(ln(\frac{2\bar{X}_n}{\theta}) - ln1) = \sqrt{n}(ln(2\bar{X}_n) - ln(\theta) - 0) =$$

$$\sqrt{n}(ln(2\bar{X}_n) - ln(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, \frac{1}{3}.[g'(1)]^2) \stackrel{D}{=} N(0, \frac{1}{3})$$