FÍSICA II - 2020

MÓDULO IV - INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE FLUIDOS

AULA 18 – Equação de movimento para fluidos ideais & eq. de Bernoulli descreve o ESCOAMENTO do fluido

FLUIDO EM MOVIMENTO

* Cinemática – Euler, campo (vetorial) de velocidades $\vec{v}(\vec{r},t)$

campo (escalar) de densidades $\rho(\vec{r},t)$

$\vec{r}$: vetor de posição de um ponto do espaço

t: instante do tempo

* Dinâmica – Segunda lei de Newton adaptada à cinemática de Euler adotada.

Hipóteses restritivas (por simplicidade): 1) Fluido ideal (viscosidade zero)

2) Basicamente fluido incompressível (ρ = Const.)

evita complicações de equações de estado não tão simples!

* Segunda lei de Newton relaciona forças e acelerações

$\boxed{\text{FORÇAS}}$ no fluido: superficiais → forças de pressão, $-\vec{\nabla} p \equiv -\text{grad } p$

Obs: $p(\vec{r},t)$ escalar, sempre que não haja cisalhamento em qualquer plano.

volumétricas → $\vec{f}_v(\vec{r})$; para forças volumétricas conservativas

$$\vec{f}_v(\vec{r}) = -\vec{\nabla} u(\vec{r})$$

densidade de energia potencial

$\boxed{\text{ACELERAÇÕES}}$ no fluido: devem ser expressas em termos do campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r},t)$ de Euler.

* O que importa para a 2ª lei de Newton: aceleração de cada pequena porção 'individual' de fluido

* velocidade da porção que está em $\vec{r}$ no instante t: $\boxed{\vec{v}(\vec{r},t)}$

* no instante $t+dt$ essa mesma porção estará em $\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)\,dt$ e terá portanto a velocidade $\boxed{\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)dt,\, t+dt)}$

* a aceleração relevante para a 2ª lei de Newton será portanto

$$\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}(\vec{r},t)dt,\, t+dt) - \vec{v}(\vec{r},t)}{dt}$$

para ver o que é isto com mais transparência é melhor abrir o argumento em componentes

$$\vec{v}(\vec{r}+\vec{v}dt,\, t+dt) = \vec{v}(x+v_x dt,\, y+v_y dt,\, z+v_z dt,\, t+dt) =$$

$$= \vec{v}(x,y,z,t) + dt\underbrace{\left[v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}(x,y,z,t) + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right]}_{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \quad (\vec{v}(\vec{r},t) \text{ aqui!})} + \mathcal{O}(dt^2)$$

Então

$$\boxed{\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r},t) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t)}$$

Equação de movimento para o fluido ideal:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}u}$$

* Existe uma identidade matemática que permite re-escrever essa equação de uma forma que aparentemente é mais complicada mas que resulta finalmente mais transparente e útil.

Identidade: $\boxed{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})}$

"rotacional de $\vec{v}(\vec{r},t)$"

Pequena ajuda para essa identidade um pouco adiante!

Equação de movimento reformada:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})\right] = -\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}u}$$

Definição: $\boxed{\vec{\Omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}}$, novo campo chamado 'vorticidade' do fluido

"rotacional de $\vec{v}(\vec{r},t)$"

Como calcular cada termo para verificar a identidade.

Pequena ajuda para a identidade $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})$

ou 'operador vetorial'

* O símbolo $\vec{\nabla}$ em componentes cartesianas é o 'vetor' $\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$

* O produto $\times$ é o 'produto vetorial', que pode ser representado por uma expressão envolvendo um determinante: sendo $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ (componentes de $\vec{v}$)

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} \equiv \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

"rotacional de $\vec{v}$"

vetor

* O primeiro termo do lado direito da identidade envolve ainda o produto vetorial desse novo vetor por $\vec{v}$. Isso pode ser calculado usando mais uma vez a representação através do determinante (ou outra que você prefira!)

* Segundo termo do lado direito: $\frac{1}{2}\vec{\nabla}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}\hat{x}\left(2v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + 2v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + 2v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$

$$+ \frac{1}{2}\hat{y}\left(2v_x\frac{\partial v_x}{\partial y} + 2v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + 2v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$$

$$+ (\text{etc.})$$

* Lado esquerdo: $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})$ é o operador $v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}$; ele age sobre o vetor $\vec{v}$

De novo a equação (de Euler) reformada

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\,\vec{\Omega}\times\vec{v}+\frac{\rho}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v})=-\vec{\nabla}p-\vec{\nabla}u$$

$\boxed{\text{Supondo } \rho \text{ constante}}$ (fluido incompressível), aplicando o operador $\vec{\nabla}\times$ a essa equação leva a

"tomando o rotacional dessa equação"

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{v})}_{\vec{\Omega}}+\rho\,\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})+\frac{\rho}{2}\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}))}_{0}=-\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}p)}_{0}-\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}u)}_{0}$$

Outra identidade, de verificação mais simples que a anterior:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}w)\equiv 0}$$

qualquer função escalar

$\boxed{\text{Pequena ajuda: adiante}}$

Portanto

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v})=0}$$

O que mostra esta equação: se, inicialmente $\vec{\Omega}\equiv 0$, a equação reformada diz que $\vec{\Omega}$ permanece nulo em qualquer tempo posterior.

campo de velocidades irrotacional

* $\vec{v}(\vec{r},t)$ evolui no tempo, mas se inicialmente $\vec{\nabla}\times\vec{v}\equiv 0$, então isso valerá sempre. Quer dizer, sempre $\vec{v}(\vec{r},t)$ será um gradiente

$\boxed{\text{Pequena ajuda adiante!}}$

"escoamento de potencial" $\longrightarrow$ $\vec{v}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t)$ $\longleftarrow$ potencial das velocidades

Pequena ajuda para a identidade $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}w) \equiv 0$

w ← qualquer função escalar

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}w) = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \hat{y}(\ldots) = 0$$

etc. qed

derivadas duplas cruzadas não dependem da ordem das derivações

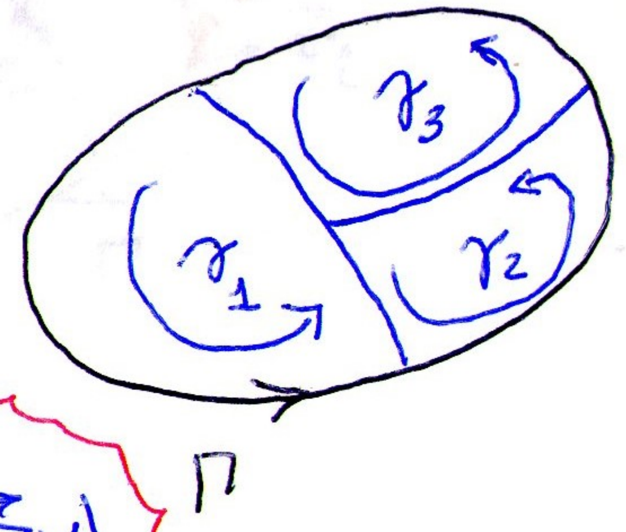
* Que papel desempenha a vorticidade $\vec{\Omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}$?

Descrição MUITO (talvez até demais) informal: tipo uma 'circulação por unidade de área' local, 'vetorializada'.

Circulação $C_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{v}(\vec{r},t)\cdot d\vec{\ell}$

Propriedade aditiva

$$\oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{3} \oint_{\gamma_i} \vec{v}\cdot d\vec{\ell}$$



Lembrar (Física I): $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = 0$ para qualquer Γ

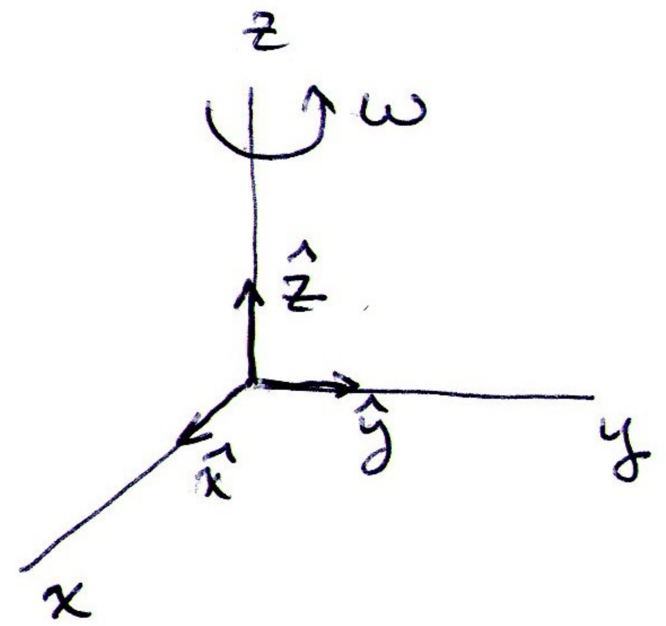
$\Updownarrow$

Forças $\vec{F}$ conservativas $(\vec{F} = -\vec{\nabla}V)$

Exemplo de um campo de velocidades não irrotacional

* Rotação 'rígida' em torno do eixo z com velocidade angular ω

Lembrar (Física I): $\boxed{\vec{v}(x,y,z)} = \omega\hat{z} \times (\underbrace{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}_{\text{vetor de posição } \vec{r}}) =$



$$= \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \boxed{-\omega y\hat{x} + \omega x\hat{y}}$$

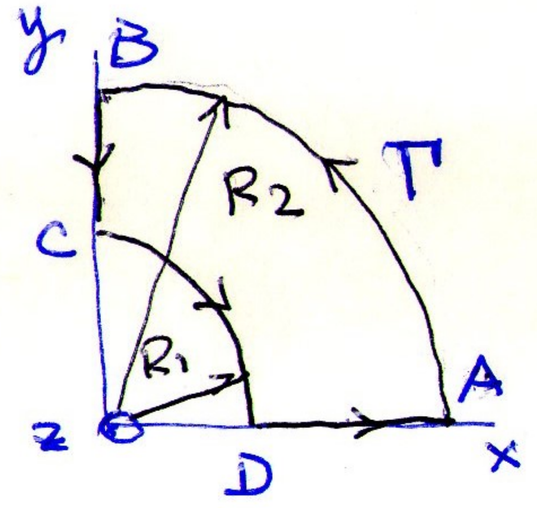
campo de velocidades

Vorticidade: $\boxed{\vec{\Omega}} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\omega x - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right) =$

$$= \boxed{2\omega\hat{z}}$$

vetor constante de módulo 2ω na direção $\hat{z}$.

Relação com circulação (neste exemplo)



$$C_\Gamma \equiv \oint_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{dl} = \frac{\pi}{2}R_2 \times \omega R_2 + \quad \leftarrow AB$$
$$+\ 0 \quad + \quad \leftarrow BC$$
$$+ -\frac{\pi}{2}R_1 \times \omega R_1 + \quad \leftarrow CD$$
$$+\ 0 \quad \leftarrow DA$$

$$= \frac{\pi}{2}\omega(R_2^2 - R_1^2) = \underbrace{2\omega}_{|\vec{\Omega}|} \times \underbrace{\frac{\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)}_{\text{Área compreendida por } \Gamma}$$

Isto pode ser escrito como

$$C_\Gamma \equiv \oint_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{dl} = \int_{S_\Gamma}(\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot\vec{dS} \quad \vec{dS} \rightarrow dx\,dy\,\hat{z}$$

que na realidade tem validade geral! (Teorema de Stokes)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Fluxo irrotacional} \\ (\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0) \\ \Downarrow \\ C_\Gamma = 0 \text{ p/ qqr } \Gamma\,! \end{array}}$$

* A obtenção de soluções da equação de movimento de Euler

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \frac{\vec{\nabla} u}{\rho}}$$

ρ = constante

$\vec{\Omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}$

em geral não é simples. Mas é possível extrair dela resultados 'secundários' que têm interêsse próprio:

EQUAÇÃO (ou TEOREMA) DE BERNOULLI.

* 'Escoamento estacionário'

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r})$$

Tomando o produto escalar da equação com $\vec{v}$, dada a suposição de escoamento estacionário

$$\underbrace{\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{v})}_{0} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\frac{u}{\rho}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\frac{u}{\rho}\right) = 0}$$

0 ($\vec{\Omega}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$)

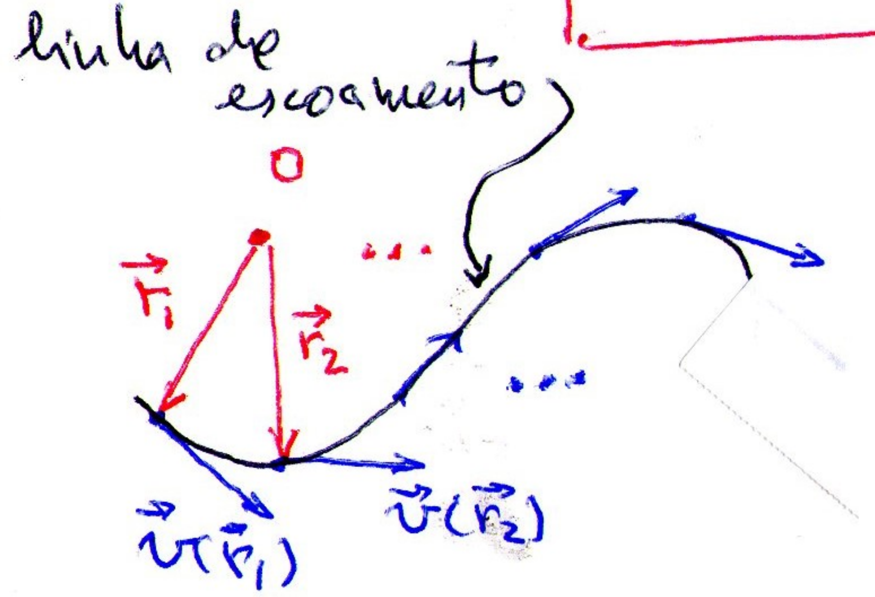
$\therefore$ $\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\frac{u}{\rho}$ não varia por um pequeno deslocamento na direção da velocidade $\vec{v}(\vec{r})$

* 'Linha de escoamento': linha tangente a $\vec{v}(\vec{r})$ em cada ponto $\vec{r}$. Independente do tempo para escoamento estacionário.

Resultado:

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\frac{u}{\rho}=\text{constante} \quad \text{ao longo de uma linha de escoamento para um escoamento estacionário}}$$

Equação (Teorema) de Bernoulli (1738)
Daniel Bernoulli (1700–1782)



* Conservação de energia ao longo de uma linha de escoamento estacionário, tendo em conta os efeitos das forças de pressão

* $v^2=v^2(\vec{r})$, $p=p(\vec{r})$ e $u=u(\vec{r})$!

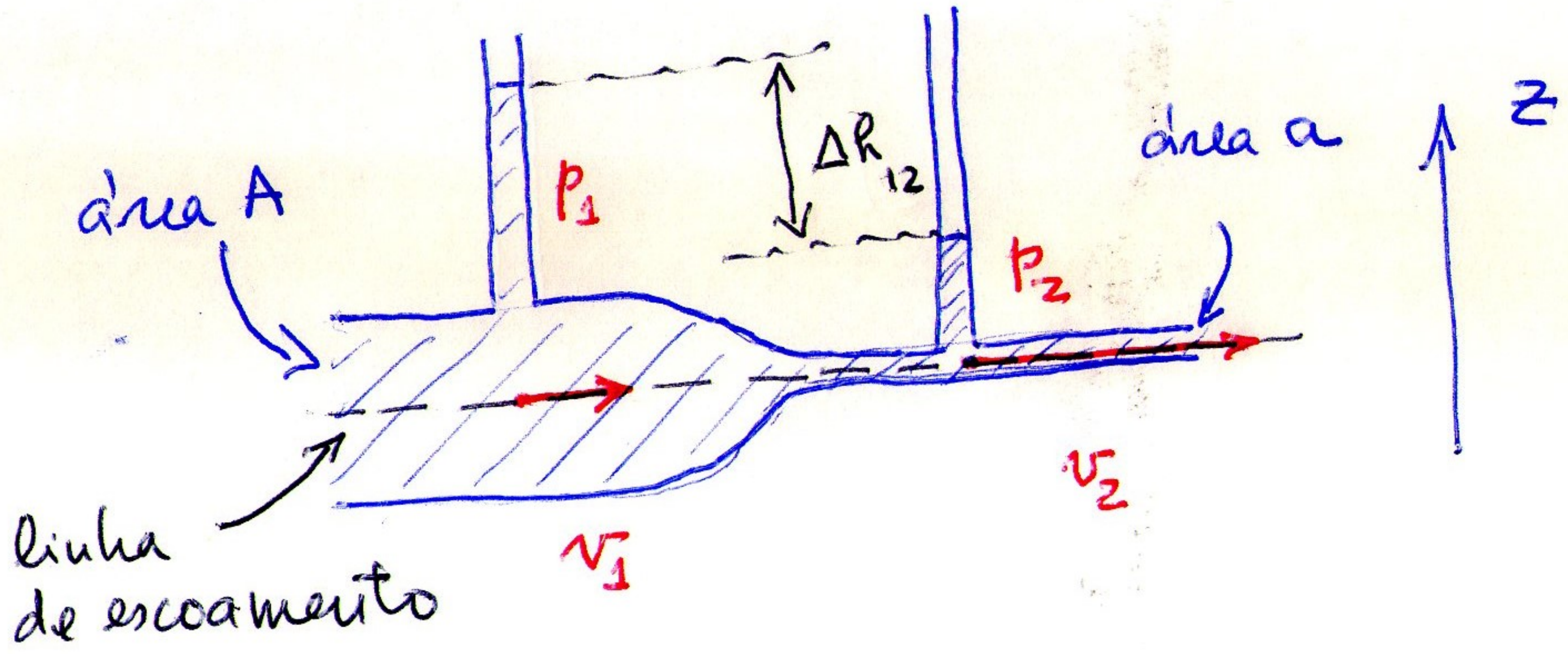
* Caso em que $u(\vec{r})=\rho g z$ (forças volumétricas $\leftrightarrow$ pêso do fluido)

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=\text{constante}$$

Ignorando efeitos de g $\left(g\Delta z \ll \frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)$

$$\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}=\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}$$

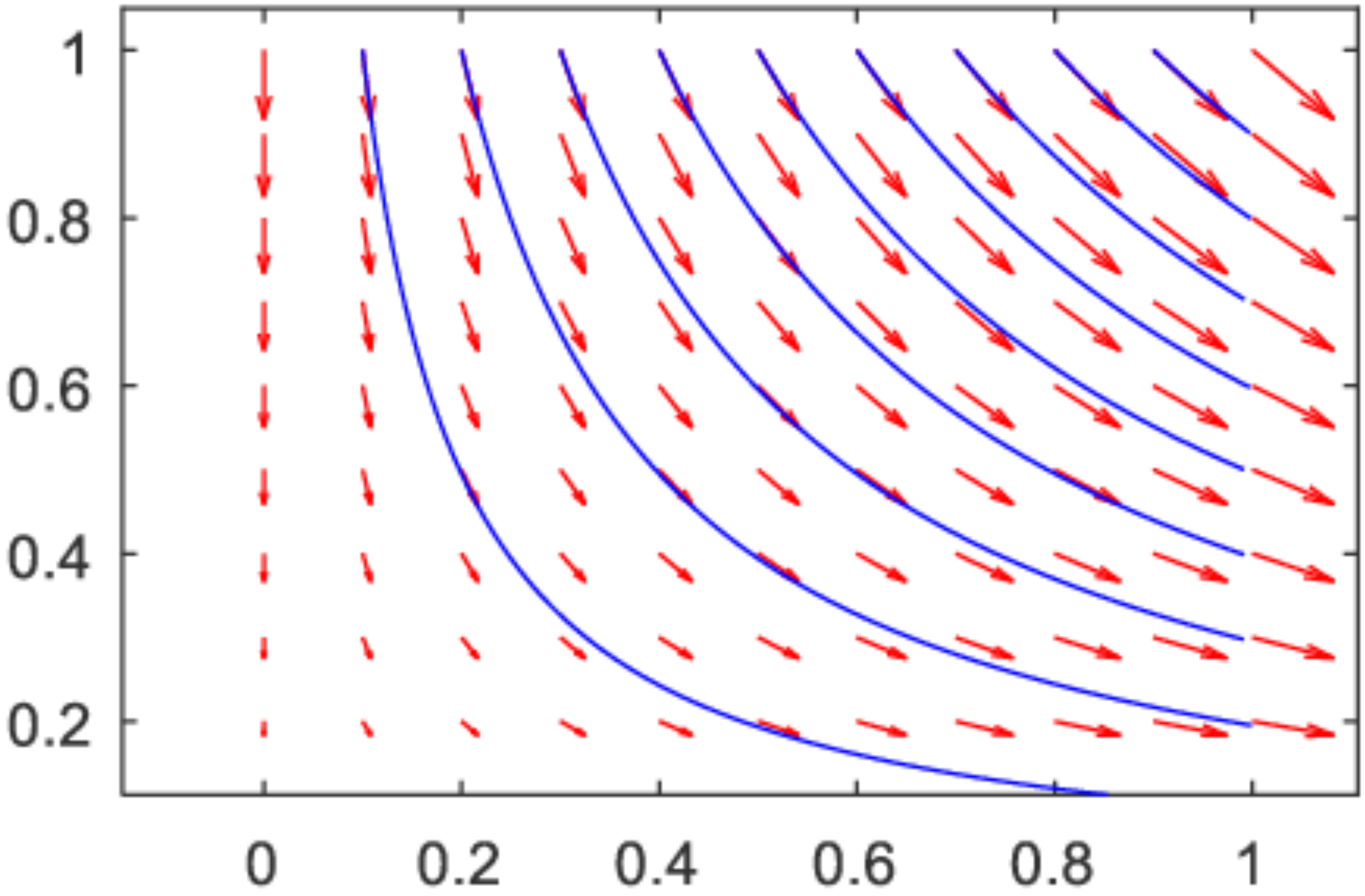
$$\boxed{p_1-p_2=\frac{\rho}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)}$$



eq. continuidade: $Av_1=av_2$

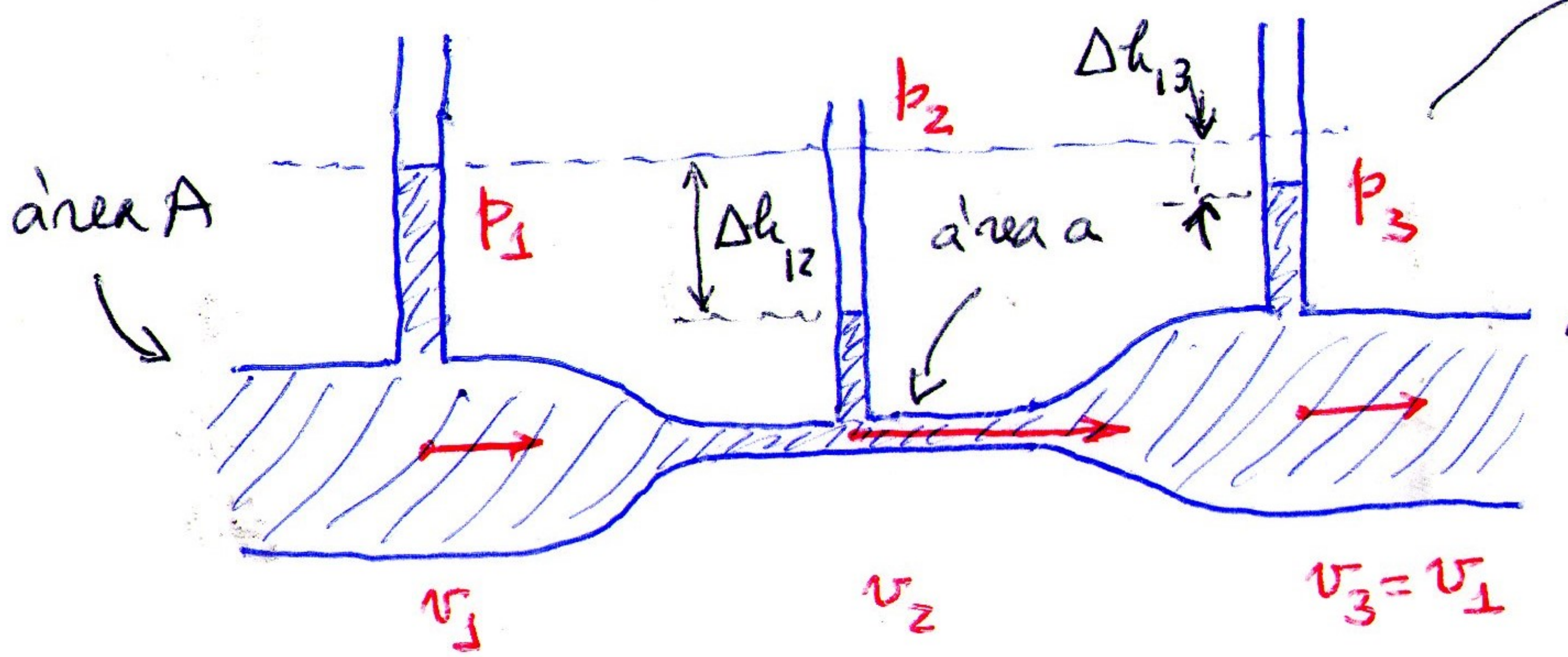
$$\boxed{\frac{v_2}{v_1}=\frac{A}{a}}$$

pressão cai, velocidade aumenta
↑ em si, AFIRMAÇÃO QUALITATIVA!



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Na realidade,



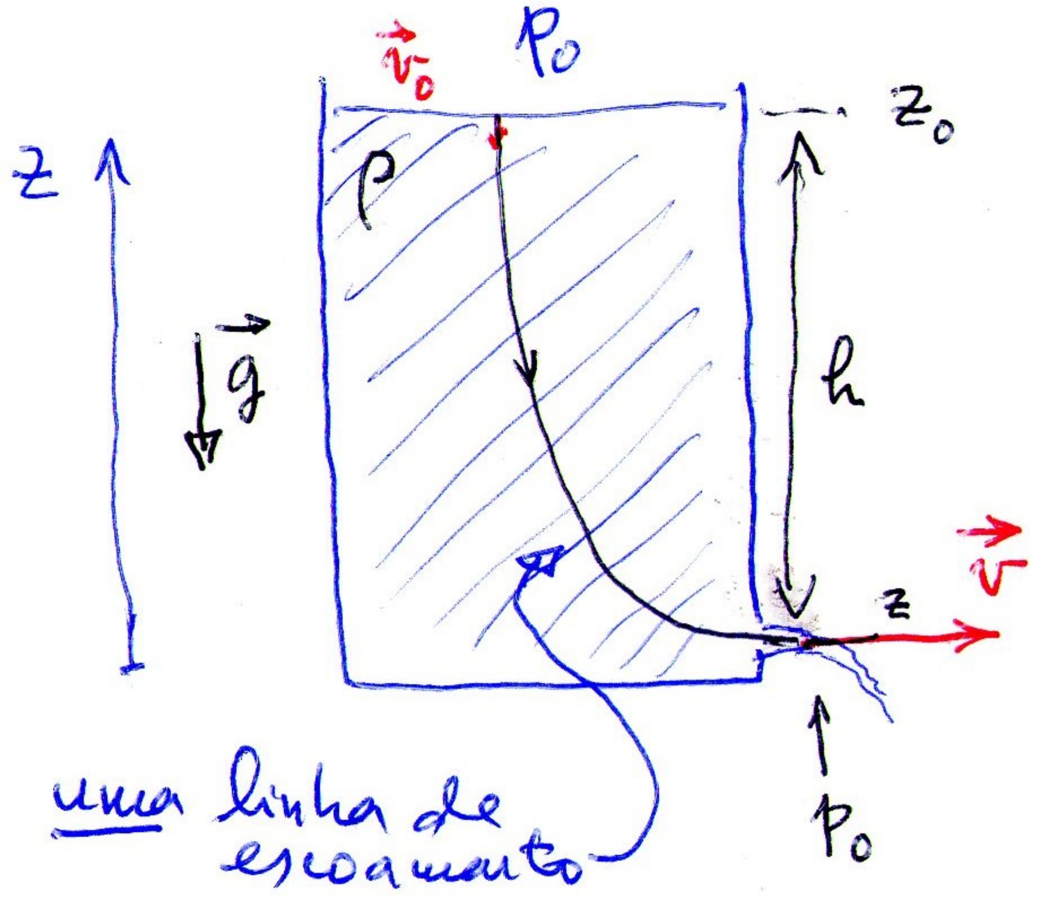
$p_3 < p_1$ devido ao atrito interno (viscosidade).

$p_1 - p_3$ diferença de pressão necessária para manter o fluxo constante!

(continuidade, incompressibilidade)

Efeitos de viscosidade ignorados na equação de movimento!

Outra aplicação famosa da equação de Bernoulli



Velocidade de saída $\vec{v}$

" na superfície $\vec{v}_0 \approx 0$

$$\underbrace{\frac{v_0^2}{2}}_{\approx 0} + \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + g z_0 = \frac{v^2}{2} + \cancel{\frac{p_0}{\rho}} + g z$$

$$v^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh$$

$$\therefore \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Fórmula de Torricelli (a original)

Na realidade $v < \sqrt{2gh}$ devido ao atrito interno (viscosidade).
(Se o jato de saída é dirigido para cima, o fluido não sobe até o nível z_0!)

vídeos sugeridos:

1) youtube.com/watch?v=JR-L2CS8DGc
(Walter Lewin, MIT; Bernoulli começa em 28:30 (total 48:21)

2) youtube.com/watch?v=HZCIP-m9g24
(Julius Miller, Australia, 1969) Demonstrações Bernoulli um tanto alla cursinho, (~17:00)

(sempre bom consumir criticamente)