Mat 0234. Medida e Integração.

IME-USP.Segundo semestre 2020

Lista de Integração

1. Mostre que a definição de integral de uma função simples é independente de sua expressão.

2. **Teorema da Convergência Monôtona** (B. Levi, Lebesgue):
Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : (X, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas, $E \in \boldsymbol{A}$.
Então $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$
Observação: para calcular o valor da Integral de uma função mensurável a partir da definição, deveríamos examinar todas as funções simples $\phi \leq f$. Mas o Teorema da Convergência Monôtona nos permite examinar apenas uma sequência não decrescente de funções simples, como as definidas na lista de funções mensuráveis. Para mostrar a linearidade da Integral, também usamos este Teorema.

3. Mostre que se f, g $\in M^+$ então $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

4. Mostre que se f $\in M^+$ e $c \geq 0$ então $\int c \, f \, d\mu = c \int f \, d\mu$

5. **Lema de Fatou** : sejam $\{f_n\}$ funções em M^+. Então $\int (\liminf f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$

6. Aplique a desigualdade do Lema de Fatou para a sequência $g_n = (\dfrac{-1}{n}) \chi_{[0,n]}$ e comente.

7. Mostre que se f $\in M^+(X, \mathcal{A}), E \in \mathcal{A}$ a função de conjunto dada por $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ é uma medida σ-aditiva

8. Se f $\in M^+(X, \mathcal{A})$. Então f=0 qtp μ se e somente se $\int f d\mu = 0$. Observação: para a demonstração, o texto de Bartle usa o Lema de Fatou mas o texto de Folland não. Comente.

9. Desigualdade de Chebyshev: Se f $\in M^+(X, \mathcal{A})$ com $\int f d\mu < \infty$ então $\int f \, d\mu \geq c \, \mu(\{x \, / \, f(x) \geq c\})$

10. Se f,g $\in M^+(X, \mathcal{A})$, f integrável. Então f=g qtp μ se e somente se $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu; \forall \, E \in \mathcal{A}$
Solução: $\Longleftarrow$) Se f integrável então g integrável pela igualdade das integrais. Seja $B_n = \{f > g + \frac{1}{n}\}$. Então $\int_{B_n} f \, d\mu \geq \int_{B_n} (g + \frac{1}{n}) \, d\mu = \int_{B_n} g \, d\mu + \int_{B_n} \frac{1}{n} \, d\mu$. Como $\int_{B_n} f \, d\mu = \int_{B_n} g \, d\mu$ por hipótese, e são finitas, podemos cancelar nos dois membros para ter $0 \geq (\frac{1}{n}) \, \mu(B_n)$. Logo $\mu(B_n) = 0$. Agora $B = \{f > g\} = \cup_1^\infty B_n$. E assim $\mu(B) = 0$. Da mesma forma consideramos $C = \{g > f\}$. E segue o resultado. Note que B_n inclui os pontos onde $f = \infty$ mas não os pontos onde $g = \infty$ porque a desigualdade é estrita.
$\Longrightarrow$) Seja $A = \{f \neq g\}$. Então $\mu(A) = 0$. Logo $\int f \, d\mu = \int f \, (\chi_A + \chi_{A^c}) \, d\mu = \int f \, (\chi_A) \, d\mu + \int f \, (\chi_{A^c}) \, d\mu = \int g \, (\chi_A) \, d\mu + \int g \, (\chi_{A^c}) \, d\mu = \int g \, d\mu$. Porque $f \, (\chi_A) = g \, (\chi_A) = 0$ qtp e já vimos que neste caso as integrais são 0. Também $f \, (\chi_{A^c}) = g \, (\chi_{A^c})$ porque f e g são iguais em A^c. Este raciocínio vale $\forall \, E \in \mathcal{A}$.

11. Se $\int f d\mu < \infty$ então o conjunto $\{x / \, f(x) = \infty\}$ tem medida zero.

12. Seja f $\in$ $M^+(X, \mathcal{A})$, X de medida finita, f limitada. Então $\int f d\mu = sup_{\{\phi\ simples, \phi\ \leq\ f\}} \int \phi\ d\mu = inf_{\{\psi\ simples, \psi\ \geq\ f\}} \int \psi\ d\mu$.
Sugestão 1: se $M \geq f$, $M \in \mathbb{R}$ considere a função $g = M - f \in M^+$.
Sugestão 2: use o Teorema da Conv. Monótona e a sequência de funções ϕ_n da lista de Funções Mensuráveis.

13. Seja a sequência não crescente $\{f_n\}$ de funções em M^+ com $\int f_1\ d\mu < \infty$. Então $lim \int f_n\ d\mu = \int\ f\ d\mu$. Este seria um Teorema de convergência monótona para sequência não crescente.

14. No exercício anterior, mostre que a hipótese de que alguma $\int\ f_n\ d\mu$ seja $< \infty$ para algum n, é essencial. Sugestão: considere $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\ \chi_{[n,+\infty)}\ d\mu$.

15. Corolário Do Teorema: $X \subset R^n$, $\boldsymbol{A}$ uma σ - álgebra e $f_n : (X, \boldsymbol{A}) \to \mathbb{R}^+$ e $f = \sum_1^\infty f_n$. Então $\int f d\mu = \sum_1^\infty \int f_n d\mu$
Dem: sejam $g_n(x) = \sum_{j=1}^n f_n(x)$. Então g_n é uma sequencia monótona não decrescente de funções em M+. Pelo Teorema da Convergencia Monótona, $\int g_n d\mu \to \int f d\mu$ ou $\sum_1^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_1^\infty f_n d\mu$.

16. Mostre que se $f \in\ M+$ integrável, então $\int f d\mu$ é absolutamente contínua. Ou seja dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ tal que se E conjunto mensurável e $\mu(E) < \delta$ então $\int_E f d\mu < \epsilon$.

17. Sejam em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ com μ a medida de Lebesgue, as funções $f_n = \chi_{(0,n)}$ que convergem para $f = \chi_{(0,+\infty)}$. O que acontece com o Teorema da Convergência Monótona?

18. Sejam em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ com μ a medida de Lebesgue, as funções $g_n = \dfrac{1}{n}\ \chi_{(n,+\infty)}$ que convergem decrescentemente e uniformemente para $g = 0$. Observe que $\int\ g_n\ d\mu = +\infty$, $\int\ g\ d\mu = 0$. Cómo relacionar isto com o Teorema da Convergência Monótona?

19. Sejam em $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ com μ a medida de Lebesgue, as funções $h_n = \dfrac{1}{n}\ \chi_{(0,n)}$ que convergem uniformemente para $h = 0$. Mas $\int\ h_n\ d\mu = 1,\ e\ \int\ h\ d\mu = 0$. Cómo relacionar isto com o Teorema da Convergência Monótona?