

Lista 5. Processo de Poisson. Exemplos. (sexta 06/10/2020)

Exercício 1. Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com a taxa λ . Seja S_n instante de ocorrência de n -ésimo evento. Achar

1. $\mathbb{E}((N(4) - N(2))(N(3) - N(1)));$
2. $\mathbb{E}(N(4) - N(2) \mid N(1) = 3);$
3. $\mathbb{E}(S_k \mid N(t) = k), \quad k \geq 2, \quad t > 0;$
4. $\mathbb{E}(S_1 \mid N(t) = k), \quad k \geq 2, \quad t > 0.$

Exercício 2. Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com taxa λ . Cada evento é registrado com a probabilidade $p(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + 1)$. Sejam $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ são processos de eventos registrados e não registrados respectivamente.

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(2\pi) < Y(2\pi))$ de que durante o tempo 2π o número de eventos registrados é maior de que não registrados.
2. Achar esperanças $\mathbb{E}(X(\pi))$ e $\mathbb{E}(Y(\pi))$.
3. Achar covariância $Cov(N(\pi), X(\pi))$.

Exercício 3. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ dois processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 , respectivamente. Os eventos (ocorrências) de processo $N_1(t)$ são classificados como eventos do tipo I com a probabilidade $p_1(t) = \min(1, 1/t)$ e tipo II com probabilidade $1 - p_1(t)$, quando eventos de processo $N_2(t)$ são classificados como eventos do tipo I com a probabilidade $p_2(t) = \min(1, 1/t^2)$ e tipo II com probabilidade $1 - p_2(t)$. Sejam $X_I(t)$ e $X_{II}(t)$ são ocorrências de eventos do tipo I e tipo II respectivamente (que vem dos dois processos $N_1(t)$ e $N_2(t)$).

1. Achar a distribuição de $X_I(t)$ e $X_{II}(t)$ para t fixo.
2. Achar covariância $Cov(N_1(t), X_I(t))$.

Exercício 4. Consideremos processo de Poisson N_1 e eventos do tipo I e II com a probabilidade $p_1(\cdot)$ e $1 - p_1(\cdot)$ respectivamente definidos em item anterior. Consideremos instantes $1 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$.

1. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) \mid N_1(t_2) = 4)$.
2. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)$.
3. $\mathbb{P}(X_{II}(t_1) = a, X_{II}(t_2) = b, X_{II}(t_3) = c)$.

Referências

- [1] S.M.Ross *Introduction to probability models*. Ninth Edition, Elsevier, 2007.