# Variáveis aleatórias

Muitos experimentos $\Rightarrow$ Resultados não numéricos

$\Downarrow$

Transformar os resultados em números

$\Downarrow$

**Variável Aleatória**

## Definição

Uma variável aleatória é uma função que associa, a cada ponto pertencente a um espaço amostral ($\Omega$), um único número real.

Consideremos o experimento lançamento de duas moedas não viciadas e a observação das faces voltadas para cima.
O espaço amostral associado a esse experimento é dado por:

$$\Omega = \{(\text{Cara, Cara}), (\text{Cara, Coroa}), (\text{Coroa, Cara}), (\text{Coroa, Coroa})\}.$$

indep.:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Seja, por exemplo, $X$ o número de caras e $Y$ o número de coroas

| | $P(x)$ |
|---|---|
| CaCa | $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ |
| CaCo | $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ |
| CoCa | $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ |
| CoCo | $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ |

| Possíveis resultados | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| (Cara, Cara) | 2 | 0 |
| (Cara, Coroa) | 1 | 1 |
| (Coroa, Cara) | 1 | 1 |
| (Coroa, Coroa) | 0 | 2 |

| $X$ | $P(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,25 |
| 1 | 0,50 |
| 2 | 0,25 |
| $\Sigma$ | 1,00 |

variáveis aleatórias $\begin{cases} \text{discretas} \\ \text{contínuas} \end{cases}$

### Variável aleatória discreta

Uma quantidade $X$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória discreta**, se assume valores em um conjunto enumerável, com certa probabilidade.

### Variável aleatória contínua

$$\text{variáveis aleatórias} \begin{cases} \text{discretas} \\ \text{contínuas} \end{cases}$$

### Variável aleatória discreta

Uma quantidade $X$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória discreta**, se assume valores em um conjunto enumerável, com certa probabilidade.

### Variável aleatória contínua

Uma quantidade $X$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória contínua**, se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, o que seria um conjunto não enumerável.

## Variáveis aleatórias discretas

### Um problema

Em 24 de março de 2013 foi divulgado o resultado de uma experiência realizada por um grupo de meninas da nona série da Hjallerup School, as quais concluíram que a proximidade dos roteadores WiFi prejudica o desenvolvimento de plantas (leia a matéria)

*Disponível em: <https://www.tecmundo.com.br/experiencia/48354-experiencia-mostra-que-roteadores-wifi-podem-matar-plantas.htm>*
*Acesso em: 02 out. 2020.*

## Suposição

Desejamos verificar a validade do estudo de tais meninas e para tanto iremos realizar um experimento com plantas de feijão.

- São necessários para um certo ensaio, 20 copos com ao menos uma muda
- Restrição: 40 copos disponíveis e apenas 120 sementes
- Suposição:porcentagem de ge http://abcnews.go.com/blogs/technology/2013/05/can-wifi-signals-stunt-plant-growth/ eijão, em condições iguais às do ensaio, é de 30%

**Ideia:** formar os copos com ao menos uma muda para verificar se a proximidade do roteador prejudica o desenvolvimento da planta.

Quantos feijões por copo devemos plantar para a obtenção dos 20 copos com ao menos uma muda?

**A)** Se forem utilizados 3 feijões por copo...

- qual é a porcentagem esperada de copos com pelo menos um feijão germinado? Com três feijões germinados? Com nenhum feijão germinado?
- qual é o número médio de feijões germinados por copo?
- dê uma ideia da variação esperada do número de feijões germinados.
- qual é o número médio de copos com ao menos um feijão germinado?

**B)** Será que não seria melhor utilizar quatro feijões por copo e apenas 30 copos? Nesse caso,

- qual é a porcentagem esperada de copos com pelo menos um feijão germinado? Com três feijões germinados? Com nenhum feijão germinado?
- qual é o número médio esperado de feijões germinados por copo?
- dê uma ideia de variação esperada do número de feijões germinados.
- qual é o número médio de copos com ao menos um feijão germinado?

**Análise da situação A**

$P(G) = 0,3$

Seja $G$ o evento germinar e $\bar{G}$ o evento não germinar.

(a) Construir o espaço amostral associado a esse experimento.

(b) Calcular as probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral.

(c) Considerar $X$ a variável número de feijões germinados e associar um valor $x$ a cada um dos elementos do espaço amostral.

(d) Considerar $Y$ a variável que associa o valor 0 ao resultado em que não há nenhum feijão germinado e o valor 1 aos resultados em que há pelo menos um feijão germinado. Associar um valor $y$ a cada um do elementos do espaço amostral.

| Resultados Possíveis | Probabilidade | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| $GGG$ | $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$ | 3 | 1 |
| $G\bar{G}\bar{G}$ | $0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,147$ | 1 | 1 |
| $\bar{G}G\bar{G}$ | $0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,147$ | 1 | 1 |
| $\bar{G}\bar{G}G$ | $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147$ | 1 | 1 |
| $\bar{G}\bar{G}\bar{G}$ | $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343$ | 0 | 0 |

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,343 |
| 1 | 0,441 |
| 2 | 0,189 |
| 3 | 0,027 |
| $\Sigma$ | 1,000 |

| $Y$ | $P(Y)$ |
|---|---|
| 0 | 0,343 |

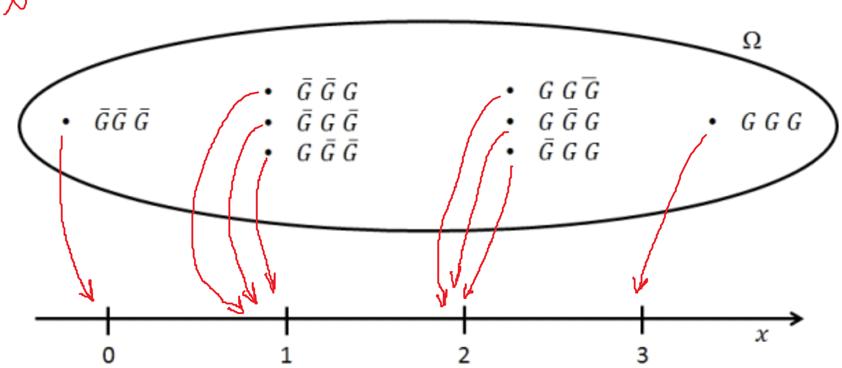
| | | | |
|---|---|---|---|
| $\bar{G}\bar{G}G$ | [illegible] = 0,147 | 1 | 1 |
| $\bar{G}\bar{G}\bar{G}$ | 0,7.0,7.0,7= 0,343 | 0 | 0 |
| $GG\bar{G}$ | 0,3.0,3.0,7= 0,063 | 2 | 1 |
| $G\bar{G}G$ | 0,3.0,7.0,3= 0,063 | 2 | 1 |
| $\bar{G}GG$ | 0,7.0,3.0,3 =0,063 | 2 | 1 |
| Total | 1,000 | | |

| Y | P(Y) |
|---|---|
| 0 | 0,343 |
| 1 | 0,657 |
| Σ | 1,000 |

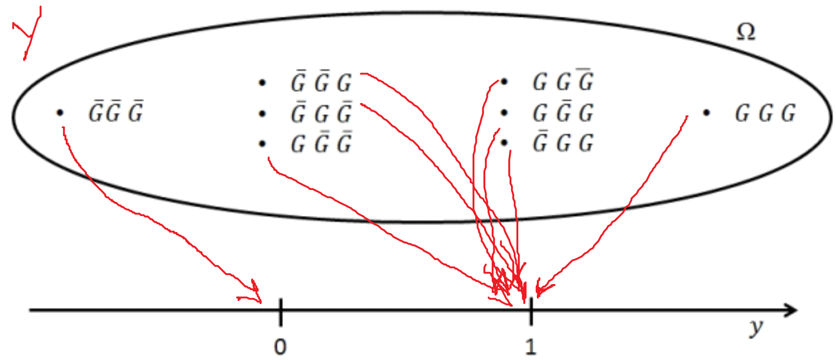
*Conferindo...*

| Possíveis Resultados | Probabilidades | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{G}\bar{G}\bar{G}$ | 0,343 | 0 | 0 |
| $\bar{G}\bar{G}G$ | 0,147 | 1 | 1 |
| $\bar{G}G\bar{G}$ | 0,147 | 1 | 1 |
| $G\bar{G}\bar{G}$ | 0,147 | 1 | 1 |
| $\bar{G}GG$ | 0,063 | 2 | 1 |
| $G\bar{G}G$ | 0,063 | 2 | 1 |
| $GG\bar{G}$ | 0,063 | 2 | 1 |
| $GGG$ | 0,027 | 3 | 1 |
| Total | 1,000 | | |

X




Y



## Distribuição de uma variável aleatória discreta

Damos o nome de **distribuição de probabilidade** (modelo probabilístico) da variável aleatória discreta $X$, ao conjunto de ponto $(x_i, P(x_i))$, em que $x_i$ representa os diferentes valores da variável aleatória e $P(x_i)$ a probabilidade de ocorrência de $x_i$, satisfazendo:

$$P(x_i) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_i P(x_i) = 1.$$

- Costuma-se adotar, também, a notação $P(X = x_i)$ para designar a probabilidade da variável aleatória $X$ assumir o valor $x_i$.

*No exemplo dos feijões:*

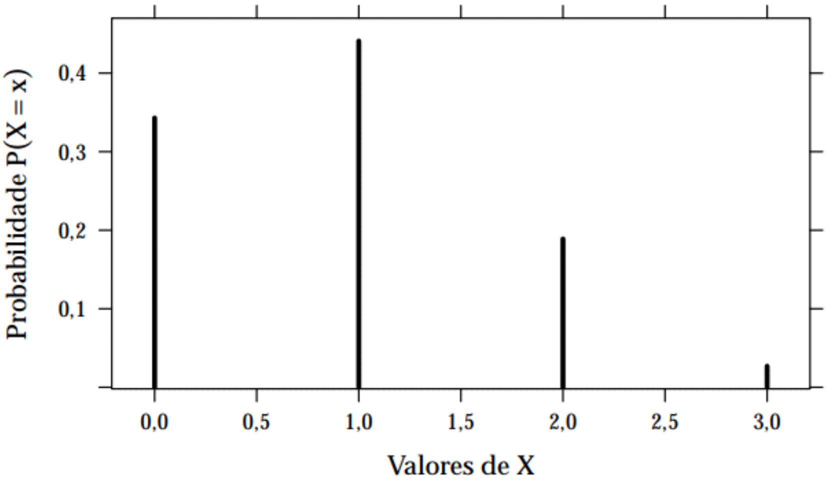
| $x$ | $P(X=x) = P(x)$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| *Total* | |

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,343 |
| 1 | 0,441 |
| 2 | 0,189 |
| 3 | 0,027 |
| $\Sigma$ | 1,000 |

*Sendo assim...*

No exemplo com feijões...

| $x$ | $P(X = x) = P(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,343 |
| 1 | 0,441 |
| 2 | 0,189 |
| 3 | 0,027 |
| Total | 1,000 |




No exemplo com feijões...

| $x$ | $P(X = x) = P(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0,343 |
| 1 | 0,441 |
| 2 | 0,189 |
| 3 | 0,027 |
| Total | 1,000 |

Qual é a porcentagem esperada de copos

- com três feijões germinados?

  2,7%

- com nenhum feijão germinado?

  34,3%

- com pelo menos um feijão germinado?

  1 − 0,343 = 65,7%

**Exercício**: Obter a distribuição da variável aleatória $Y$ e um gráfico que a represente.

### Função de probabilidades

A função que fornece as probabilidades de ocorrências dos valores que a variável aleatória pode assumir é chamada **função de probabilidades** (f.p.)

**Exemplo**: A função de probabilidades da variável $X$ = número de feijões germinados, é dada por:

$$P(x) = \binom{3}{x} 0,3^x 0,7^{(3-x)}, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Calcular $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ por meio da função de probabilidades.

$$P(x=0) = \frac{\cancel{3!}}{0!\,\cancel{3!}} \cdot \cancel{0,3^0} \cdot 0,7^3 = 0,343$$

$$P(x=1) = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^2 = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{1!\,\cancel{2!}} \cdot 0,3 \cdot 0,7^2 = 0,441$$

$$P(X=2) = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^1 = 0,189$$

$$P(X=3) = \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!}\,0!} \cdot 0,3^3 \cdot \cancel{0,7^0} = 0,027$$

Mas...

Qual é o número médio esperado de feijões germinados por copo?

### Valor médio ou esperança matemática de $X$

Dada a variável aleatória $X$, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$ com as respectivas probabilidades $P(x_1), P(x_2), \ldots$, chamamos **valor médio** ou **esperança matemática de** $X$ ao valor:

$$\mu_X = E(X) = \sum_i x_i P(x_i).$$

No exemplo com feijões...
Calcular o valor médio ou esperança da variável aleatória $X$.

| $x$ | $P(X = x) = P(x)$ | $xP(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0 |
| 1 | 0,441 | 0,441 |
| 2 | 0,189 | 0,378 |
| 3 | 0,027 | 0,081 |
| Total | 1,000 | 0,900 |

Interpretação: Espera-se, na observação de um número grande de copos, obter um número médio de 0,9 feijões germinados por copo.
$\cong 1$

**Exercício**: Calcular o valor médio ou esperança da variável aleatória $Y$.

Valor médio ou esperança matemática de uma função de $X$

Dada uma variável aleatória $X$, assumindo os valores $x_1, x_2, \ldots$, com as respectivas probabilidades $P(x_1), P(x_2), \ldots$, chamamos **valor médio** ou **esperança matemática de uma função** $h(X)$ ao valor:

$$\mathrm{E}[h(X)] = \sum_i h(x_i)P(x_i).$$

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot P(x_i)$

**Exercício**: Calcular:

1. o valor médio ou esperança da função $3X$ $\rightarrow E(3X) = 2,7$
2. o valor médio ou esperança da função $X^2$ $\rightarrow E(X^2) = 1,44$
3. o valor médio ou esperança da função $(X - 0,5)^2$ $= 0,79$
4. o valor médio ou esperança da função $(X - \mu_X)^2$ $= 0,63$
5. $\mathrm{E}[|X - \mu_X|]$

| $x$ | $P(X = x) = P(x)$ | $xP(x)$ | $3x \cdot P(x)$ | $x^2 P(x)$ | $(x-\mu_x)^2 P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0,441 | 0,441 | 1,323 | 0,441 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0,441 | 0,441 | 1,323 | 0,441 | |
| 2 | 0,189 | 0,378 | 1,134 | 0,756 | |
| 3 | 0,027 | 0,081 | 0,243 | 0,243 | |
| Total | 1,000 | 0,900 | 2,7 | 1,44 | 0,63 |

**Observação**: Sejam $a$ e $b$ duas constantes quaisquer e $h(X) = a + bX$, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(a + bX) &= \sum_i (a + bX)P(x_i) \\
&= \sum_i \left[aP(x_i) + bx_iP(x_i)\right] \\
&= \sum_i aP(x_i) + \sum_i bx_iP(x_i) \\
&= a\sum_i P(x_i) + b\sum_i x_iP(x_i) \\
&= a + b\mathrm{E}(X)
\end{aligned}$$

$E(a+bx) = a + bE(x)$

$E(5+x) = 5 + E(x)$

$E(10x) = 10E(x)$

$\sum P(x) = 1$

$\sum x P(x) = E(x)$

$E(x) = 0{,}9$

**Exercício**: Calcular $\mathrm{E}(30X)$, $\mathrm{E}(10 + X)$, $\mathrm{E}(1 - 2X)$ e $\mathrm{E}(X - \mu_X)$

$E(30x) = 30E(x) = 30 \cdot 0{,}9 = 27$

$E(10+x) = 10 + E(x) = 10 + 0{,}9 = 10{,}9$

$E(1-2x) = 1 - 2E(x) = 1 - 2 \cdot 0{,}9 = -0{,}8$

$E(X - \mu_x) = E(x) - \mu_x = 0{,}9 - 0{,}9 = 0{,}0$

### Variância de X

Dada a variável aleatória $X$, chamamos de **variância** de $X$ ao valor médio ou esperança da função $(X - \mu_X)^2$,

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right].$$

Automaticamente ficam definidos o desvio padrão e o coeficiente de varição da variável aleatória $X$, dados respectivamente por:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \qquad \text{e} \qquad CV_X = 100 \times \frac{\sigma_X}{\mu_x}.$$

$\mu_X$

$E\left[(X-\mu_X)^2\right] = 0{,}63 \Rightarrow \sigma_X^2$ $\qquad CV_X = 100 \cdot \frac{0{,}7937}{0{,}9}$

$\sigma_X = \sqrt{0{,}63} = 0{,}7937$ $\qquad CV_X = 88{,}19\%$

**Exemplo**: Calcular para as variáveis aleatórias $X$ e $Y$ a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação.

**Observação**:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] \\
&= \mathrm{E}(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\mu_X + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \Big[\mathrm{E}(X)\Big]^2
\end{aligned}$$

Variância de $X$

Fórmula mais prática para o cálculo da variância de $X$:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \Big[\mathrm{E}(X)\Big]^2.$$

**Exemplo**: Recalcular a variância de $X$ utilizando a fórmula mais prática.

| $x$ | $P(X=x)=P(x)$ | $xP(x)$ | $x^2P(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0 | 0 |
| 1 | 0,441 | 0,441 | 0,441 |
| 2 | 0,189 | 0,378 | 0,756 |
| 3 | 0,027 | 0,081 | 0,243 |
| Total | 1,000 | 0,900 | 1,440 |

$\sigma_X^2 = 1{,}44 - (0{,}9)^2 = 0{,}63$

**Exercício**: Refazer todos os cálculos considerando 4 feijões por vaso e responder a sequência **B)** de questões iniciais.

### Função de distribuição acumulada

Dada a variável aleatória $X$, chamaremos de **função de distribuição acumulada** ou simplesmente **função de distribuição** a função $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida por:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

**Exercício**: Calcular para a variável aleatória $X$ = número de feijões germinados,

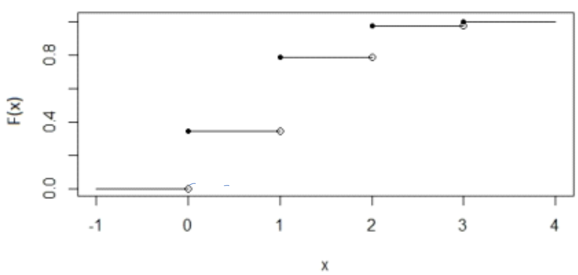
- $F(-1) = P(X \leq -1) = 0$
- $F(0) = P(X \leq 0) = 0{,}343$
- $F(0,5) = P(X \leq 0,5) = 0{,}343$
- $F(1) = P(X \leq 1) = 0{,}784$
- $F(3) = P(X \leq 3) = 1{,}0$
- $F(4) = P(X \leq 4) = 1{,}0$

| $x$ | $P(x)$ | $F(x) = P(X \leq x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,343 | 0,343 |
| 1 | 0,441 | 0,784 |
| 2 | 0,189 | 0,973 |
| 3 | 0,027 | 1,000 |
| $\Sigma$ | 1,000 | — |

$F(1{,}5) = P(X \leq 1{,}5) = 0{,}784$

A função de distribuição acumulada da variável aleatória $X$ = número de feijões germinados é dada a seguir, bem como o gráfico que a representa.

$$F(x) = \begin{cases} 0,000 & \text{para} \quad x < 0 \\ 0,343 & \text{para} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0,784 & \text{para} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0,973 & \text{para} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1,000 & \text{para} \quad x \geq 3 \end{cases}$$



# Variáveis aleatórias Discretas

Maioria dos problemas $\Rightarrow$ Poucos modelos básicos

$\Downarrow$

Verificar as suposições do modelo

## Distribuição de Bernoulli

**Experimento:** O departamento de Entomologia e Acarologia da ESALQ/USP realizou um experimento para verificar a eficácia de uma nova substância no controle de determinada praga. Um grupo de 30 insetos foi submetido à nova substância e, depois de um determinado período, foram avaliados. Tomando-se ao acaso, um inseto do estudo, verifica-se se este esta vivo ou morto.

Variável aleatória $X$: mortalidade.

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad \text{se morreu} \\ x &= 0 \quad \text{se não morreu} \end{aligned}$$


Algumas pressuposições:

- É realizada apenas uma repetição do experimento;
- Apenas dois resultados possíveis: morreu ou não morreu.

$E(x^2) = \sum x^2 P(x)$

$E(x^2) = T$

Evento $M = \{$O inseto morreu$\}$

$$P(M) = \pi \qquad P(\bar{M}) = 1 - \pi.$$

$E(x) = \sum x \cdot P(x)$

$$P(M) = \pi \qquad P(\bar{M}) = 1 - \pi.$$

$E(X) = \sum x P(x)$
$E(X) = \pi$

Distribuição de probabilidade:

| Resultados | $x$ | $P(X = x)$ | $xP(x)$ | $x^2P(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{M}$ | 0 | $1 - \pi$ | 0 | 0 |
| $M$ | 1 | $\pi$ | $\pi$ | $\pi$ |
| Total | | $(1 - \pi) + \pi = 1$ | $\pi$ | $\pi$ |

Portanto, a variável aleatória $X$: mortalidade, tem distribuição de Bernoulli.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \pi - \pi^2 = \pi.(1 - \pi)$$

A função de probabilidade de uma variável Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}.$$

Logo,

$$P(X = 0) = \cancel{\pi^0} . (1 - \pi)^1 = 1 - \pi$$
$$P(X = 1) = \pi^1 . \cancel{(1 - \pi)^0} = \pi$$

Média

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x=0}^{1} x P(X = x) = 0 \times (1 - \pi) + 1 \times \pi = \pi.$$

Variância

$$Var(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1 - \pi)$$

Logo, o desvio padrão de uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli é dado por:

$$\sigma_X = \sqrt{\pi(1 - \pi)}.$$

**Exemplo**: Um grupo composto por 10 pessoas ingeriu uma determinada bebida calmante, 6 afirmaram sentir-se melhor e mais calmos após um determinado período. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa desse grupo. Seja $X$ = "aprensentar-se mais calmo". Verifique se é um ensaio de Bernoulli. Determinar a $P(X = x)$, calcular $E(X)$ e $Var(X)$.

X: apresentar-se mais calmo

$\pi = 0{,}6 \qquad (1-\pi) = 0{,}4$

$E(X) = \sum x \cdot P(x)$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \sum x^2 P(x)$

| $x$ | $P(x)$ | $x \cdot P(x)$ | $x^2 P(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,4 | 0,0 | 0,0 |
| 1 | 0,6 | 0,6 | 0,6 |
| $\Sigma$ | 1,0 | 0,6 | 0,6 |

É um ensaio de Bernoulli
- 1 única repetição
- duas possibilidades (sucesso ou fracasso)

$E(X) = \sum x P(x) = 0{,}6 = \pi$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0{,}6 - 0{,}6^2 = 0{,}6(1-0{,}6) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0{,}24} = 0{,}4899$

## Distribuição binomial

**Experimento:** Verificar se dois insetos submetidos à nova substância permaneceram vivos ou morreram.

Pressuposições:

- o fato de um inseto morrer, ou não, não tem influência no fato de o outro inseto morrer, ou não, ou seja, as mortes são **independentes**;
- a probabilidade dos insetos morrerem é a mesma, igual a $\pi$.
- só há dois resultados possíveis para cada inseto: morreu ou não morreu (ensaio de Bernoulli); e
- existem duas repetições.

Variável aleatória $X$ = número de insetos mortos.

| Resultado | Probabilidade | $x$ |
|---|---|---|
| $MM$ | $\pi\pi$ | 2 |
| $M\bar{M}$ | $\pi(1-\pi)$ | 1 |
| $\bar{M}M$ | $(1-\pi)\pi$ | 1 |
| $\bar{M}\bar{M}$ | $(1-\pi)(1-\pi)$ | 0 |
| Total | 1 | |

Distribuição de probabilidades

| $x_i$ | $P(X=x)$ |
|---|---|
| 0 | $\pi^0(1-\pi)^2$ |
| 1 | $2\pi^1(1-\pi)^1$ |
| 2 | $\pi^2(1-\pi)^0$ |
| Total | 1 |

Generalizando...

A probabilidade de $x$ insetos morrerem e, portanto, $n-x$ insetos permanecerem vivos, nesta sequência,

$$\underbrace{M, M, \ldots, M}_{x}, \underbrace{\bar{M}, \bar{M}, \ldots, \bar{M}}_{n-x}$$

é dada por:

$$\pi^x(1-\pi)^{n-x}.$$

Outras sequências podem ocorrer com a mesma probabilidade, tais como:

$$M, M, M \ldots, \bar{M}, \bar{M}, M, \bar{M}, \ldots, \bar{M} \quad \text{ou} \quad M, M, M \ldots, \bar{M}, M, \bar{M}, \bar{M}, \ldots, \bar{M}.$$

Existem

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

## Generalizando...

Logo,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

**Observações**:

- a denominação binomial decorre do fato de os coeficientes $\binom{n}{x}$ serem exatamente os coeficientes do desenvolvimento binomial dos termos $(a+b)^n$;
- o cálculo dos coeficientes, para $n$ e $x$ grandes, é difícil de ser realizado.

**Notação**: $X \sim B(n; \pi)$.

Pressuposições:

- Existem $n$ repetições ou provas idênticas do experimento;
- Só há dois tipos de resultados possíveis em cada repetição;
- As probabilidades $\pi$ de sucesso e $(1-\pi)$ de fracasso permanecem constantes em todas as repetições;
- Os resultados das repetições são independentes uns dos outros.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

### Média

$$\mu_X = \mathrm{E}(X) = n\pi.$$

### Variância

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = n\pi(1-\pi)$$

**Exercício**: Seja $X$ a variável aleatória número de plantas com mutação em um total de $n$ plantas irradiadas e $p = 0,0001$ a probabilidade de uma planta irradiada apresentar mutação. Calcular:

(a) a probabilidade de não aparecer plantas com mutação em um total de 1000 plantas irradiadas;

(b) a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação em 1000 plantas irradiadas;

(c) a probabilidade de não aparecer planta com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(d) a probabilidade de aparecer pelo menos duas plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(e) o número médio esperado de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

(f) a variância esperada do número de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas;

$X$: planta com mutação

$\pi = 0,0001$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

a) $n = 1000$ plantas

$$P(X=0) = \frac{\cancel{1000!}}{0!\,\cancel{1000!}} \cdot \cancel{0,0001^0} \cdot (0,9999)^{1000} = \underline{0,9048}$$

b) $n = 1000$ plantas

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,9048 = 0,0952$$

$$P(X \geq 1) = \underline{0,0952}$$

c) $n = 2000$ plantas

$$P(X=0) = \frac{\cancel{2000!}}{\cancel{0!}\,\cancel{2000!}} \cdot \cancel{0,0001^0}\,(0,9999)^{2000} = \underline{0,8187}$$

d) $n = 2000$ plantas

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$$= 1 - 0,8187 - 0,1638 = 0,0175$$

$= 1 - 0{,}8187 - 0{,}1638 = 0{,}0175$

$P(X=1) = \frac{2000!}{1!\,1999!} \cdot 0{,}0001^1 \cdot (0{,}9999)^{1999} = 0{,}1638$

$P(X \geq 2) = 0{,}1638$

e) $E(X)$? $n = 2000 \Rightarrow E(X) = n\pi = 2000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}2$

$E(X) = \mu_X = 0{,}2$

f) $Var(X)$? $Var(X) = n\pi(1-\pi) = 2000 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}9999$

$Var(X) = 0{,}19998$

# Distribuição de Poisson

### A distribuição de Poisson

é largamente utilizada quando desejamos contar número de ocorrências de um evento de interesse, por unidade de tempo, comprimento, área ou volume. A unidade de medida deve ser estabelecida de tal modo que o valor esperado das contagens seja baixo (inferior a 10).

**Exemplos**:

- número de indivíduos por quadrante de 1 $m^2$;
- número de colônias de bactérias por 0,01 $mm^2$ de uma dada cultura, observado em uma plaqueta de laboratório;
- número de defeitos em 1000 m de tecido;
- número de acidentes em uma esquina movimentada e bem sinalizada, por dia;
- número de partículas radioativas emitidas numa unidade de tempo: e número de micronúcleos/1000 células.

**Importante**: Estudo de dinâmica de populações e de entomologia.

2,71...

**Importante**: Estudo de dinâmica de populações e de entomologia.

$e \cong 2,71\ldots$

### Função de probabilidades

A função de probabilidades de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

em que $\lambda$ é igual ao número de ocorrências do evento de interesse por unidade de tempo, distância, área, ...

**Notação**: $X \sim P(\lambda)$.

tem distribuição

Poisson

parâmetro $\lambda$

### Média

A esperança de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$\mu_X = \text{E}(X) = \lambda.$$

### Variância

A variância de uma variável aleatória $X$ com distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda$ é dada por:

$$\sigma^2_X = \text{Var}(X) = \lambda.$$

**Exemplo**: A emissão de partículas radioativas tem sido modelada por meio de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de duas emissões em um minuto.

$X \sim P(\lambda)$ $\quad \lambda = 5$ emissões/minuto

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$
$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$P(X<2)$
$= P(X=0) + P(X=1)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$ $\quad$ $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$

$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - 0{,}0067 - 0{,}0337$

$= 0{,}9596$

$P(X \geq 2) = 0{,}9596$

$$P(X=0) = \frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} = 0{,}0067$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-5} \cdot 5^1}{1!} = 0{,}0337$$

**Exemplo**: Sabe-se que numa certa rede de computadores ocorre em média uma queda por semana. Um pesquisador deseja realizar um trabalho envolvendo simulação em que são necessários 2 dias consecutivos sem haver queda na rede. Supondo o modelo de Poisson, calcular a probabilidade dele não conseguir realizar a simulação.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

| *x* | *P(X=x) = P(x)* |
|---|---|
| *0* | 0,7515 |
| *1* | 0,2147 |
| *2* | 0,0307 |
| *3* | 0,0029 |
| $P(X \geq 4)$ | $1 - P(X<4)$ |
| *Total* | *1,000* |

$$P(X=0) = \frac{e^{-2/7} \cdot (2/7)^0}{0!} = 0{,}7515$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-2/7} \cdot (2/7)^1}{1!} = 0{,}2147$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-2/7} \cdot (2/7)^2}{2!} = 0{,}0307$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-2/7} \cdot (2/7)^3}{3!} = 0{,}0029$$

*Definir a variável de interesse: X = número de quedas em dois dias*

*Definir a probabilidade de interesse:* $P(X=0)$

$$P(\textit{não conseguir realizar a simulação}) = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0)$$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - 0{,}7515$

$= 0{,}2485$

1 queda —— 7 dias

$\lambda$ —— 2 dias

$\lambda = 2/7$

$\lambda$ —— 2 dias

$= 0{,}2485$

na calculadora:

$P(X=0) \Rightarrow$ Shift $e^x$ $(-2 \div 7) \times (2 \div 7)$ ^ $0 \div 0$ shift $x!$

## Aproximação da distribuição binomial pela distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson, $P(\lambda)$, com $\lambda = n\pi$ é uma boa aproximação à distribuição binomial $B(n, \pi)$, quando $\pi$ for pequeno e $n$ for bastante grande, tal que $n\pi \leq 10$.

**Exemplo**: Seja $X$ a variável número de plantas com mutação em um total de $n$ plantas irradiadas e $\pi = 0,0001$ a probabilidade de uma planta irradiada apresentar mutação. Calcular, usando a distribuição de Poisson como uma aproximação à binomial:

(a) a probabilidade de não aparecer planta com mutação em 1000 plantas irradiadas;

(b) a probabilidade de aparecer ao menos uma planta com mutação em 1000 plantas irradiadas; $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 0{,}0952$

(c) a probabilidade de não aparecer plantas com mutação em 2000 irradiadas; $P(X=0) = 0{,}8187$

(d) a probabilidade de aparecer ao menos duas plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas; $P(X \geq 2) = 0{,}0176$

(e) o número médio esperado de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas; $E(X) = 0{,}2 = \lambda$

(f) a variância esperada do número de plantas com mutação em 2000 plantas irradiadas; $Var(X) = 0{,}2 = \lambda$

a) $n = 1000$ $\quad \lambda = 1000 \cdot 0{,}0001$ $\quad \lambda = 0{,}1$

$\pi = 0{,}0001$

$$P(X=0) = \frac{e^{-0,1} \cdot 0{,}1^0}{0!} = 0{,}9048$$