DEPENDÊNCIA LINEAR

aula 16/10

$(V, +, \cdot)$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

$v_1, ---, v_n \in \mathbb{R}$

Equação Vetorial

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + --- + x_n v_n = \underbrace{0}_{\text{vetor}} \qquad (*)$$

Encontrar escalares $x_1, x_2, ---, x_n$ que satisfaçam $(*)$

Note que SEMPRE temos a solução $\underbrace{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}_{\text{SOLUÇÃO TRIVIAL}}$

Dados n vetores em V, a pergunta é:

SERÁ QUE EXISTEM soluções de $(*)$ além da solução trivial?

DEF: Os vetores $v_1, ---, v_n$ são LI se $(*)$ tem só (APENAS) a solução trivial e são LD caso contrário.

DEF: LI

Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LI se

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall n$ IMPLICA

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Def: LD Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LD se não forem LI, isto é, se existem escalares NÃO TODOS NULOS tais que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

(Pelo menos um dos a_i's $\neq 0$.)

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$ LI ou LD

Podemos falar conjuntos LI e LD ou vetores LI e LD.

Propriedades da Dependência Linear

$(V, +, \cdot)$

$S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$

P1. Se $0 \in S$, então S é LD.

$0 \in S$, significa que $v_i = 0$ para algum i.

$0v_1 + \cdots + 0v_{i-1} + \overset{\neq 0}{1} v_i + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_n = 0$

é uma CL de $v_1, \ldots, v_n$ com escalares NÃO todos nulos que leva ao vetor nulo.

P2. Se $S = \{v_1\}$ e $v_1 \neq 0$, então S é LI.

De fato, se $a_1 v_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

P3: Se S é LD então $\underbrace{\text{um}}_{\text{pelo menos}}$ dos vetores é CL dos outros.

Existem escalares $\underbrace{\text{NÃO todos nulos}}$ tais que

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$, pois S é LD

Isto significa que existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que $a_i \neq 0$.

Mudando a ordem dos vetores, se necessário, podemos supor que $a_1 \neq 0$.

Então $a_1 v_1 = (-a_2)v_2 + \cdots + (-a_n)v_n$.

Como $a_1 \neq 0$

$$a_1^{-1}(a_1 v_1) = (a_1^{-1})(-a_2)v_2 + \cdots + (a_1^{-1})(-a_n v_n)$$

$$\Rightarrow v_1 = -(a_1^{-1}a_2)v_2 + \cdots + (-a_1^{-1}a_n)v_n$$

isto é, v_1 é CL de $v_2, \ldots, v_n$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (3, 4, 3)$

$v_2 = (1, 1, 1)$

$v_3 = (1, 2, 1)$

P_4 Se S_1 e S_2 são conjuntos finitos e não vazios e $S_1 \subset S_2$ com S_1 LD então S_2 é LD.

$S_1 = \{v_1, ---, v_k\} \subset S_2$

$S_2 = \{v_1, ---, v_k, v_{k+1}, ---, v_n\}$

S_1 LD $\Rightarrow$ existem $a_1, ---, a_k$ não todos nulos tais que $a_1 v_1 + --- + a_k v_k = 0$.

Então $a_1 v_1 + --- + a_k v_k + 0\, v_{k+1} + --- + 0\, v_n = 0$ é uma CL de $v_1, ---, v_n$ com pelo menos um escalar não nulo (já que ao menos um dos a_i's é diferente de 0.

P_6 (IMPORTANTE)

Se $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ é LI e $v \in V$ é tal que $S \cup \{v\}$ é LD então v é CL de $\{v_1,\dots,v_n\}$.

Dem: $S \cup \{v\}$ LD $\Longrightarrow$ existem escalares não todos (*) nulos tais que

(*) $a, a_1, \dots, a_n$

$$a v + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

Pelo menos 1 deles é $\neq 0$.

(1) Caso 1. $a = 0$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \xRightarrow[\{v_1,\dots,v_n\} \text{ LI}]{} a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

contra a hipótese de que pelo menos um deles é $\neq 0$.

(2) Caso 2: $a \neq 0$

$$a v = (-a_1) v_1 + \dots + (-a_n) v_n$$

$$v = a^{-1}(av) = -(a^{-1} a_1) v_1 + \dots + (-a^{-1} a_n) v_n \Rightarrow v \text{ é CL de } v_1, \dots, v_n$$

P7 Se $S=\{v_1, ..., v_n\}$ e se v_j, $1 \leq j \leq n$ é CL de $v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n$ então

$$[S] = [S - \{v_j\}]$$

Dem: Só para facilitar a notação, vamos supor que $j = 1$.

$$S - \{v_1\} = \{v_2, ..., v_n\}$$

$$[v_2, ..., v_n] \subset [v_1, ..., v_n] = [S]$$

Agora, provar que $[S] \subset [v_2, ..., v_n]$

$$\{v_2, ..., v_n\} \subset [v_2, ..., v_n]$$

$v_1 =$

$\exists\, b_2, ..., b_n$ tq $v_1 = b_2 v_2 + ... + b_n v_n$

Logo $v_1 \in [v_2, ..., v_n]$

Então $v_1 \cup \{v_2, ..., v_n\} = \{v_1, ..., v_n\} \subset [v_2, ..., v_n]$

$$\Longrightarrow [S] \subset [v_2, ..., v_n]$$

Exemplo

$v_1 = (3,4,3)$
$v_2 = (1,1,1)$
$v_3 = (1,2,1)$

$$[v_1, v_2, v_3] = [v_2, v_3]$$
$\supset$ óbvia

$v \in [v_1, v_2, v_3] \Rightarrow \exists\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tq
$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

Mas $v_1 = 2v_2 + v_3$

$$\Rightarrow v = a_1(2v_2 + v_3) + a_2 v_2 + a_3 v_3$$
$$= \underbrace{(2a_1 + a_2)}_{b_2} v_2 + \underbrace{(a_1 + a_3)}_{b_3} v_3 \in [v_2, v_3]$$