Complementos da aula de 13/10

Exemplo

$P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado, isto é, nenhum subconjunto FINITO de $P(\mathbb{R})$ pode gerar $P(\mathbb{R})$.

Suponha que $S = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ gera $P(\mathbb{R})$. Então todo polinômio de $P(\mathbb{R})$ pode ser escrito como um CL de $f_1, \ldots, f_m$.

Seja $n = \max\{\text{grau } f_i,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Então $[S] \subset P_n(\mathbb{R})$. ABSURDO, pois $P(\mathbb{R})$ tem polinômios de grau tão grande quanto se queira, em particular $t^{n+1} \notin [S]$.

$P(\mathbb{R}) = [1, t, t^2, t^3, \ldots\ldots]$

Vamos estudar espaços vetoriais finitamente gerados, isto é, esses espaços vetoriais que têm um conjunto gerador FINITO.

OBS: Todo espaço vetorial V tem um conjunto gerador já que $[V] = V$. Entretanto, estamos interessados em determinar conjuntos geradores MINIMAIS, com o menor número de vetores.

Para certos espaços vetoriais como $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sabemos que ele tem um conjunto gerador "mínimo", porém é impossível exibi-lo. Em $P(\mathbb{R})$, embora não sendo FG ainda conseguimos exibir um conjunto gerador "mínimo" que é $\{1, t, t^2, \ldots\}$

Exemplos da aula de 13/10

$\mathbb{R}^3 = [\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,2,3)}_{v_3}]$

É claro que $[(1,1,1),(1,2,1),(1,2,3)] \subset \mathbb{R}^3$

Seja agora $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Mostrar que existem $x,y,z \in \mathbb{R}$ tq $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (a,b,c)$

$$x(1,1,1) + y(1,2,1) + z(1,2,3) = (a,b,c)$$

Temos que $(x+y+z, x+2y+2z, x+y+3z) = (a,b,c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = a \\ x+2y+2z = b \\ x+y+3z = c \end{cases}$$

Analisar o sistema e ver que tem solução quaisquer que sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ \longrightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array}\right]$$

Caimos no sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ y + z &= b - a \\ 2z &= c - a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{c-a}{2}$$

$$y = b - a - \frac{(c-a)}{2} = \frac{2b - 2a - c + a}{2} = \frac{2b - a - c}{2}$$

$$x + y + z = a \Rightarrow x = a - \frac{2b-a-c}{2} - \frac{c-a}{2}$$

O sistema tem solução quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$[S_1] = [S_2] \iff S_1 \subset [S_2] \text{ e } S_2 \subset [S_1]$$

O subespaço gerado por S_1 é igual ao subespaço gerado por S_2 $\iff$ todo vetor de S_1 está em $[S_2]$ e todo vetor de S_2 está em S_1.

Exemplo: $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$S_1 = \{\underbrace{\cos^2 t}_{f_1}, \underbrace{\operatorname{sen}^2 t}_{f_2}\}$ $\quad S_2 = \{\underbrace{1}_{g_1}, \underbrace{\cos 2t}_{g_2}\}$

Mostrar que $[S_1] = [S_2]$.

(1) $S_2 \subset [S_1]$

$1 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$

$g_1 = 1 = 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$

$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$

$g_2 = 1 \cdot f_1 + (-1) f_2$

(2) $S_1 \subset [S_2]$

Sabemos que

$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$\Rightarrow \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = \cos 2t$

$\Rightarrow 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$

$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$

$f_1 = \frac{1}{2} g_1 + \frac{1}{2} g_2$

Analogamente

$f_2 = \operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t = \frac{1}{2} g_1 - \frac{1}{2} g_2$