Aula 8 – Substituições trigonométricas

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Objetivo da aula:

Discutir a técnica da **Substituição inversa** e usar as funções trigonométricas para resolver integrais de funções com raízes.

Exemplo 1

Usando integração, calcule a área da circunferência de raio 1.

Método da Substituição Inversa

- Sejam g e f funções contínuas e deriváveis tais que $[c,d] \subseteq Dom(g)$ e $Im(g) \subseteq Dom(f)$.
- Lembre-se da seguinte igualdade para a regra da substituição (trocando x por $g(t)$ na primitiva de $f(x)$):
- $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$
- E para integrais definidas:
- $\displaystyle\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_{c}^{d} f(g(t))g'(t)dt.$
- Se $g : [c,d]$ é bijetora sobre a imagem e $a = g(c)$ e $b = g(d)$, reescreva a igualdade anterior como:
- $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$

- Na **regra da substituição** é dada a função $f(g(t))g'(t)$ e transformamos em $f(x)$ para calcular a integral.
- Na **regra da substituição inversa** é dada a função $f(x)$ e transformamos em $f(g(t))g'(t)$.
- Na regra da substituição a *variável nova* é escrita em função da *variável velha*.
- Na regra da substituição inversa a *variável velha* é escrita em função da *variável nova*.

Aplicação do cálculo de $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

- Consideramos $g(t) = \operatorname{sen} t$ e $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Temos $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt$.
- Assim, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$.
- Lembrando que $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$.
- Portanto, a primitiva de $\cos^2 t$ é $\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}$.
- Logo, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Notação do diferencial

- Fazemos a transformação $x = \operatorname{sen}\theta$.
- Temos $dx = \cos\theta d\theta$
- Então $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta d\theta$.
- Para integral definida:
  $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{\operatorname{arcsen}\, a}^{\operatorname{arcsen}\, b} f(\operatorname{sen}\theta)\cos\theta d\theta$.
- Usa-se tradicionalmente a letra grega θ para ângulos.

Tabela de substituições trigonométricas recomendadas

Expressão	Substituição	Intervalo(s)	Igualdade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$[0, \frac{\pi}{2}[\cup[\pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\sec^2 \theta - 1 = \operatorname{tg}^2 \theta$

Exemplo 2

Calcule $\int_0^3 x^3\sqrt{9-x^2}dx$.

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ *(compare as soluções usando substituição trigonométrica inversa e substituição direta).*

Exemplo 4

Calcule $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Exemplo 5

Calcule $\int x\sqrt{x^2 - 1}dx.$

Exemplo 6

Calcule $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

Fim