Relação de ordem

(Ver junto com TIC7, onde tem mais exercícios)

- O último tipo especial de relação que veremos é a relação de ordem.

Vocês já estão acostumados a trabalhar com uma "ordem" quando lidam com $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

Mas já viram "ordem" colocada em outros conjuntos? Conseguem pensar em exemplos de ordem, por exemplo, em $\mathcal{P}(X)$ (X um conjunto qualquer) ou em $\{f;\ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \text{ é função}\}$?

- Primeiro temos que ver a definição de ordem:

Def: Seja R uma relação em um conjunto A. Dizemos que:

(a) R é uma ordem (parcial) ou uma relação de ordem em A se R é reflexiva, transitiva e satisfaz

$$\forall x,y \in A\ (xRy \text{ e } yRx \to x=y) \quad \text{(antissimétrica)}$$

Neste caso dizemos que (A,R) é um conjunto ordenado.

(b) R é uma ordem estrita em A se R é transitiva e satisfaz

$$\forall x,y \in A\ (xRy \to \text{não}(yRx)) \quad \text{(assimétrica)}.$$

Notações: ordem parcial: $\leq, \preceq$ ("menor ou igual")
ordem estrita: $<, \prec$

Exemplos: (a) a ordem usual $\leq$ em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

(b) "$\subset$" é uma ordem em $\mathcal{P}(X)$, onde X é um conjunto qualquer. Ou seja, se $A = \mathcal{P}(X)$, $\subset_A = \{(x,y) \in A \times A : x \subset y\}$ é uma ordem parcial em A (Esta seria a maneira mais precisa de dizer o que queremos; usa-se $\subset_A$ e não $\subset$ para diferenciar, mas não faremos isso).

(c) "$\supset$" também é uma ordem parcial (i.e., $\{(x,y) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : x \supset y\}$.)

(d) $=_A$ é uma ordem em A

(e) $n | m$ é uma ordem em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

(f) $<$, $\subsetneq$, $\supsetneq$ são exemplos de ordem estritas.

(fica ao exercício mostrar que os exemplos de fato são ordens, parciais ou estritas)

- Note que a diferença entre uma ordem (parcial) e uma ordem estrita é se permitimos a igualdade ou não. Dada uma ordem, para torná-la estrita é só "acrescentar o $\neq$". Dada uma ordem estrita para torná-la uma ordem (parcial) é só "permitir o $=$". É isso que diz a próxima proposição:

Prop: i) Se R é uma ordem em A, a relação S definida por aSb se e somente se aRb e $a \neq b$ $\forall a, b \in A$, é uma ordem estrita em A

ii) Se S é uma ordem estrita em A, então $R = \{(a,b) \in A \times A ; aSb \text{ ou } a = b\}$ é uma ordem em A.

Dem; Esse é o exercício 3 de TIC7 - Ordens.

. Veremos agora a "terminologia" usada quando se trabalha com ordens e os conceitos principais.

. Estamos mais acostumados a trabalhar com ordens nos números, por exemplo em $\mathbb{R}$. Mas neste caso vale uma propriedade a mais: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \leq y$ ou $y \leq x$.
Essa propriedade nem sempre vai valer quando trabalhamos com ordens de modo geral.

Exemplo; Seja $A = \mathcal{P}(X)$, onde $X = \{1, 2\}$, com a ordem $\leq = \subseteq_A = \subseteq$

Note que $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ e $\{2\} \not\subseteq \{1\}$.

Ou seja, $\exists a, b \in A$ tal que não vale $(a \leq b$ ou $b \leq a)$.

. Quando trabalhamos com uma ordem parcial qualquer nem sempre teremos que os elementos de A são "comparáveis":

Def: Seja $\leq$ uma relação de ordem em um conjunto A.

(a) Para $a, b \in A$, dizemos que a e b são <u>comparáveis</u> se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Caso contrário, dizemos que a e b são <u>incomparáveis</u>.

(b) Se quaisquer dois elementos de A são comparáveis, ou seja, se $\forall x, y \in A$ $(x \leq y$ ou $y \leq x)$, dizemos que a ordem é <u>linear</u> ou <u>total</u>. Neste caso dizemos que $(A, \leq)$ é <u>linearmente ordenado</u>.

<u>Exemplos</u>:

1. Em $\mathbb{R}$ com $\leq$ usual, x e y são comparáveis $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Logo $\leq$ é uma ordem total em $\mathbb{R}$.
2. Em $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$, 2 e 3 não são comparáveis (2 não divide 3 e 3 não divide 2), e portanto a ordem não é total.
3. $\subseteq$ em $A = \mathcal{P}(X)$, onde X tem pelo dois elementos, também não é total: se $a, b \in X$, $a \neq b$, então $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ e $\{b\} \not\subseteq \{a\}$.

- Esta é a principal diferença com a ordem que vocês estavam acostumados a trabalhar, a usual de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$). Agora dados a, b em A não podemos assumir que um é maior que o outro, eles podem simplesmente não se relacionarem. Isso vai ser importante no que veremos a seguir.

· Vamos ver mais alguns conceitos importantes.

Def: Seja $\leq$ uma ordem em A e $B \subseteq A$.

(a) $b \in B$ é o menor elemento (ou mínimo) de B na ordem $\leq$ se $b \leq x \ \forall x \in B$ (e escrevemos $b = \min B$).

(b) $b \in B$ é um elemento minimal de B na ordem $\leq$ se $\nexists\, x \in B$ tal que $x \leq b$ e $x \neq b$

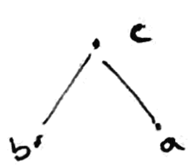
(c) $b \in B$ é o maior elemento (ou máximo) de B na ordem $\leq$ se $x \leq b \ \forall x \in B$ (e escrevemos $b = \max B$)

(d) $b \in B$ é um elemento maximal de B na ordem $\leq$ se $\nexists\, x \in B$ tal que $b \leq x$ e $x \neq b$.

Obs: No que como a ordem pode ter elementos não comparáveis, dizer que alguém é maior do que todo mundo é diferente de dizer que não tem ninguém maior.

Exemplos:

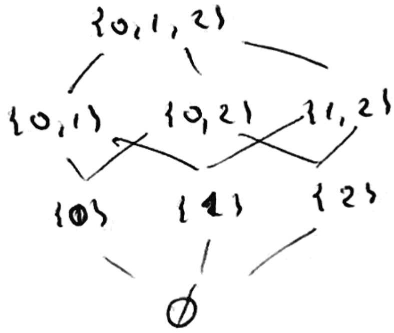
1) $A = \{a, b, c\}$ e $< = \{(a,c),(b,c)\}$ (e $\leq$ é $x<y$ ou $x=y$)



Note que c é o maior elemento (é maior que todo mundo) e é elem. maximal

Agora, a e b são elementos minimais (não tem ninguém menor), mas não são menores elementos (nenhum dos dois), pois não vale $b \leq a$ nem $a \leq b$ (nenhum dos dois é menor que todo mundo)

2. Considere "$\subseteq$" em $\mathcal{P}(X)$ onde $X = \{0,1,2\}$



. Se $B = \mathcal{P}(X)$,

. $\emptyset$ é o menor elemento e elemento minimal

. $\{0,1,2\}$ é maior elemento e elemento maximal.

Agora se $B = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, B não tem menor elemento e $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2\}$ são elementos minimais de B. De modo análogo, se $B = \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$, B não terá maior elemento e $\{0,1\}$, $\{0,2\}$ e $\{1,2\}$ são elementos maximais de B.

3. $\mathbb{R}$ com $\leq$ usual

. Se $B = \mathbb{R}$, B não tem maior elemento ou elemento maximal

O mesmo vale se $B = [0,1[$.

($\therefore$ mesmo a ordem sendo total pode não ter maior elem.)

. Se $B = [0,1]$, 0 é o menor elem (mínimo) e 1 é o maior elemento (máximo) de B.

. Se $B = [0,1[$, 0 é mínimo (e minimal).

. Pelos exemplos percebemos que nem sempre existe elem. mínimo e/ou menor elemento, nem elem. máx. e/ou maior elemento.

A seguinte observação segue das definições dadas:

Obs: 1) Se $\leq$ é uma ordem em A e $B \subseteq A$ então:

(a) o menor (maior) elemento de B, se existe, é único.

(b) o menor (maior) elemento de B, se existe, é também elemento minimal (maximal) de B.

2) Pelos exemplos, percebemos que os elementos maximais e minimais (quando existem) não precisam ser únicos, pode ter mais de um. (Dê outros exemplos).

• Outro conceito importante, que é o "mesmo" que já viram em Análise Real, é o de supremo e ínfimo:

Def: Suponha $\leq$ uma ordem em A e $B \subseteq A$. Definimos:

(a) $a \in A$ é um <u>limitante</u> (cota) <u>superior</u> de B se $x \leq a$ $\forall x \in B$

(b) $a \in A$ é o <u>supremo</u> <u>de</u> B ($\sup B$) se a é o menor elemento do conjunto de todos os limitantes superiores de B.

(c) $a \in A$ é um <u>limitante</u> (cota) <u>inferior</u> de B se $a \leq x$ $\forall x \in B$

(d) $a \in A$ é o <u>ínfimo</u> <u>de</u> B ($\inf B$) se a é o maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de B.

Obs: Em (a) e (c) da definição, pedimos $a \in A$ e não $a \in B$ (limitante superior/inferior de B não precisa estar em B)

• Das definições dadas segue fácil que:

<u>Obs</u>: a) O sup e inf de um conjunto, se existem, são únicos.

b) Se $b = \inf B$ e $b \in B$, então b é o menor elemento de B. Análogo para $b = \sup B$.

c) Por outro lado, se b é o menor elemento de B, então $b = \inf B$. Análogo para b maior elemento.

• O próximo resultado segue das definições e é útil quando trabalhamos com sup e inf.

<u>Prop</u>: Seja $\leq$ uma ordem em A e $B \subseteq A$. Para $b \in A$, $b = \inf B$ se e somente se valem:

(i) $b \leq x \quad \forall x \in B$ ("=" b é cota inferior")

(ii) se $b' \leq x \quad \forall x \in B$, então $b' \leq b$ ("=" é a maior cota inf)

Vale o resultado análogo para $b = \sup B$.

<u>Dem</u>: Segue das definições. Note que (i) diz que b é limitante inferior e (ii) é só uma outra maneira de dizer que b é o maior limitante inferior (diz que se tem outro, vai ter que ser $\leq b$).

Fica como exercício escreverem o resultado análogo para supremo (é só inverter as desigualdades) //

Exemplos:

1) $\mathbb{R}$ com a ordem usual $\leq$. Os conceitos de sup e inf são os que viram em Análise Real.

2) Seja $A = \mathcal{P}(X)$, $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer, com a ordem da inclusão ($\subset$). Se $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$, temos que

$$\sup S = \bigcup S \quad \text{e} \quad \inf S = \bigcap S$$

(exercício)
(ver TIC?)

· A última definição é a de "isomorfismo". De modo geral, isomorfismo é uma bijeção que preserva a "estrutura" (vocês já devem ter visto em Álgebra isomorfismo de grupo, corpo etc.):

<u>Def</u>: Um <u>isomorfismo</u> entre duas ordens parciais $(P,<)$ e $(Q,\prec)$ é uma função $h: P \to Q$ bijetora que satisfaz

$$a < b \longleftrightarrow h(a) \prec h(b) \quad \forall a,b \in P$$

Nesse caso dizemos que $(P,<)$ e $(Q,\prec)$ são isomorfos.

<u>Obs</u>: Se $(P,<)$ e $(Q,\prec)$ são ordens totais, uma função $h: P \to Q$ bijetora é um isomorfismo se e somente se

$$a < b \rightarrow h(a) \prec h(b) \quad \forall a,b \in P$$

(exercício)