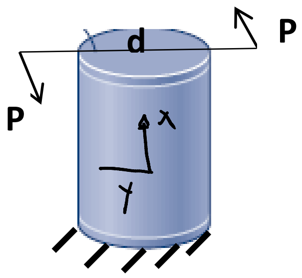
Q1)Um tanque cilíndrico é pressurizado com água a uma pressão de 5 MPa. Um torque T é aplicado na extremidade superior como mostra a figura. Sabendo que o diâmetro externo $D_{ext} = 250$ mm e a espessura $t = 6$ mm do tanque, determine a magnitude do torque T de tal forma que a tensão normal máxima seja 150 MPa. Defina claramente suas premissas e mostre as etapas de cálculo. (3.0)



$T = P \times d$

Tensão axial e circunferencial em recipiente cilíndrico de parede fina

$$\sigma_x = pr/2t \rightarrow \sigma_x = (5 \times 125)/12 \rightarrow \sigma_x = 52.08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = pr/t \rightarrow \sigma_y = (5 \times 125)/6 \rightarrow \sigma_y = 104.16 \text{ MPa}$$

0,5

Segundo o círculo de Mohr, a tensão máxima vem dada por

$$\sigma_{max} = R + \sigma_{average}$$

$$150 = R + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$150 = R + \frac{3pr}{4t}$$

1,0

$$150 = R + 78.125$$

$$R = 71.875 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 71.875$$

$$\sqrt{\left(-\frac{pr}{4t}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 71.875$$

$$\sqrt{(26)^2 + \tau_{xy}{}^2} = 71.875$$

$$\tau_{xy} = 67 \text{ MPa}$$

0,5

TORÇÃO $\longrightarrow$

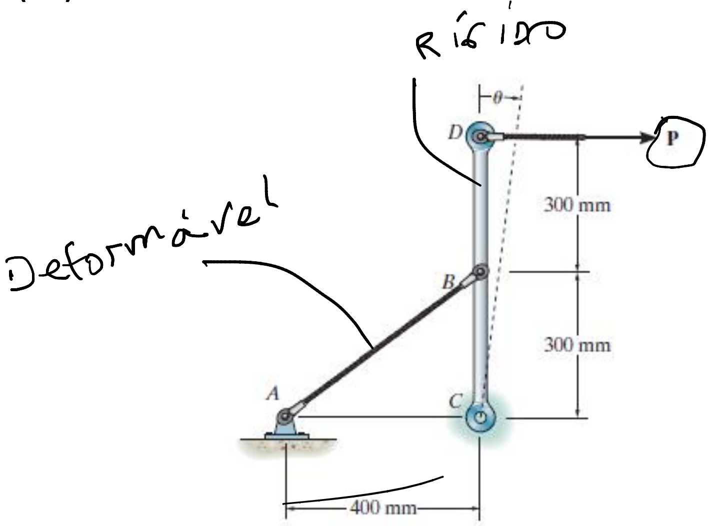
$$\frac{Tr}{J} = 67$$

$$T = 67\frac{J}{r} \rightarrow T = \left(\frac{67}{125}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)[125^4 - (125-6)^4]$$

$$T = 36.7 \text{ kN-m}$$

1,0

Q2) O mecanismo mostrado na figura é utilizado em um sistema de controle de uma superfície em aviões de pequeno porte. O membro CBD é considerado rígido e o cabo AB se deforma segundo a carga P. Se a deformação no cabo AB é 0.2% quando se aplica uma carga P, determine o deslocamento do ponto D. Defina suas premissas e mostre as etapas de cálculo. (2.0)



Problema que envolve somente variações na geometria. Comprimento inicial do cabo AB

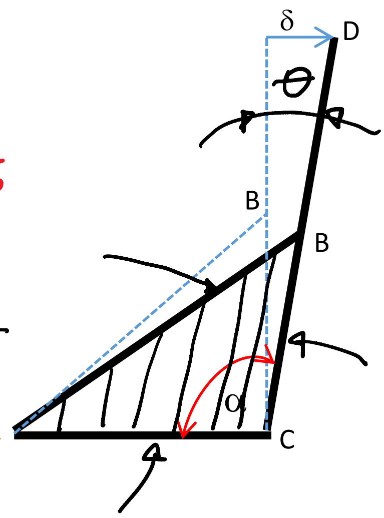
$$l_0 = \sqrt{300^2 + 400^2} \rightarrow l_0 = 500 \text{ mm}$$ 0,5

Comprimento do cabo AB na condição deformada

$$l_f = l_0 + \varepsilon l_0$$

$$l_f = l_0(1+\varepsilon) \rightarrow l_f = 500(1+0.002) \rightarrow l_f = 501 \text{ mm}$$ 0,5

O ângulo α formado entre a horizontal e o elemento rígido CBD é obtido usando a lei dos cossenos:



$$AB'^2 = AC^2 + CB'^2 - 2 \times AC \times CB' \times \cos\alpha$$

$$501^2 = 400^2 + 300^2 - 2 \times 400 \times 300 \times \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = 0.004171$$ 0,25

$$\alpha = 90.239°$$

O ângulo entre a vertical CB e o elemento rígido vale CBD é obtido por

$$\theta = \alpha - 90 = 90.239° - 90° \rightarrow \theta = 0.239°$$ 0,25

O deslocamento na extremidade D é obtido como

$$\delta_D = s = r\theta$$

$$\delta_D = s = 600 \times \left(0.239° \times \frac{\pi}{180°}\right)$$

$$\delta_D \cong s = 2.5 \text{ mm}$$ 0,5

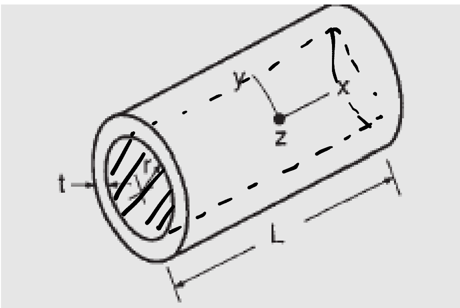
$\frac{2,5}{600}$

Q3) Um tanque cilíndrico de parede fina está submetido a uma pressão interna p [MPa]. Determine a magnitude da pressão interna que irá mudar o volume interno (dV/V_0) do tanque em 0.5%. Considere o diâmetro externo $D_{ext} = 1$ m, espessura $t = 25.4$ mm, e o material do tanque aço. As deformações de engenharia nas três direções são definidas como $\varepsilon_x = \Delta L/L_0$, $\varepsilon_y = \Delta(\pi D)/\pi D_0 = \Delta D/D_0$, e $\varepsilon_z = \Delta t/t_0$. As tensões vêm dadas por $\sigma_x = pr/2t$, $\sigma_y = pr/t$ e $\sigma_z = -p$. Defina suas premissas e mostre as etapas de cálculo. (3.0)

LEI HOOKE

Deformações

$\Delta V = 0.005 V_0$



$\frac{D}{t} >> 1$

σ_x ✓

σ_y ✓

Para simplificar o problema consideramos a tensão z como nula $\sigma_z \cong 0$. O volume interno do cilindro vem dado por

$$V_{int} = \frac{\pi D_{int}^2}{4} L \rightarrow V_{int} = f(D_{int}, L)$$

0,5

A variação do volume interno vem dada pelas variações do diâmetro e do comprimento

$$dV_{int} = \frac{\partial V_{int}}{\partial D} dD + \frac{\partial V_{int}}{\partial L} dL$$

$$dV_{int} = \frac{2\pi D_{int} L}{4} dD + \frac{\pi D_{int}^2}{4} dL$$

$$dV_{int} = \frac{\pi}{4}\left[2D_{int} L dD + D_{int}^2 dL\right]$$

0,5

Calcula-se a razão dV/V

$$\frac{dV_{int}}{V_{int}} = \frac{\pi}{4}\left[2D_{int} L dD + D_{int}^2 dL\right] \frac{1}{\frac{\pi D_{int}^2 L}{4}}$$

$$\frac{dV_{int}}{V_{int}} = \left[2D_{int} L dD + D_{int}^2 dL\right] \frac{1}{D_{int}^2 L}$$

$$\frac{dV_{int}}{V_{int}} = \left[\frac{2D_{int} L dD}{D_{int}^2 L} + \frac{D_{int}^2 dL}{D_{int}^2 L}\right]$$

$$\frac{dV_{int}}{V_{int}} = \left[2\frac{dD}{D_{int}} + \frac{dL}{L}\right]$$

$$\frac{dV_{int}}{V_{int}} = \left[2\varepsilon_y + \varepsilon_x\right] \rightarrow 2\varepsilon_y + \varepsilon_x = 0.005$$

0,5

Usando a lei de Hooke para relacionar as tensões e as deformações

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \cancel{\sigma_z})\right] \rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\frac{pr}{2t} - \upsilon\frac{pr}{t}\right] \rightarrow \varepsilon_x = \frac{pr}{Et}(0.5 - \upsilon)$$

0,25

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)] \rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\frac{pr}{t} - \upsilon\frac{pr}{2t}\right] \rightarrow \varepsilon_y = \frac{pr}{Et}(1 - 0.5\upsilon)$$ 0,25

Finalmente a pressão vem dada por

$$2\varepsilon_y + \varepsilon_x = 0.005$$

$$2\frac{pr}{Et}(1 - 0.5\upsilon) + \frac{pr}{Et}(0.5 - \upsilon) = 0.005$$

$$\frac{pr}{Et}[2(1 - 0.5\upsilon) + (0.5 - \upsilon)] = 0.005$$

$$\frac{pr}{Et}\left[\frac{5}{2} - 2\upsilon\right] = 0.005$$

$$\frac{pr}{Et}\left(\frac{5-4\upsilon}{2}\right) = 0.005$$

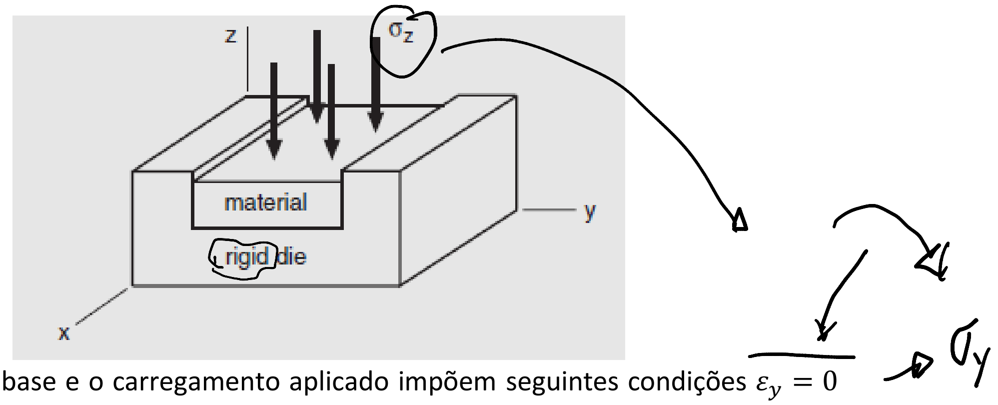
$$p = 0.005E\left(\frac{2}{5-4\upsilon}\right)\frac{t}{r}$$ 0,5

$$p = 0.005 \times 206 \times 10^3\left(\frac{2}{5-4\times0.3}\right)\frac{25.4}{500}$$

$$p = 27.5 \text{ MPa}$$ 0,5

Q4) responda as seguintes questões

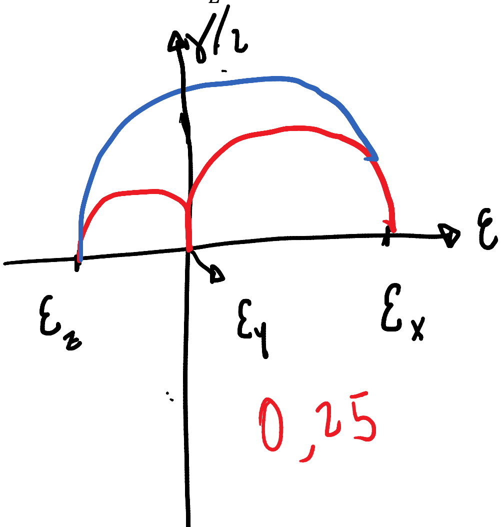
a) Faça um desenho esquemático do círculo de Mohr das tensões e deformações para um ponto típico do material mostrado na figura. **Justifique seus desenhos. (0.5)**

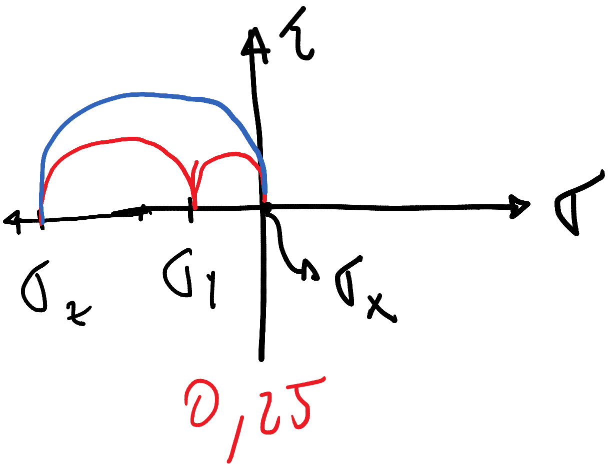


As restrições da base e o carregamento aplicado impõem seguintes condições $\varepsilon_y = 0$ e $\sigma_x = 0$. Cisalhamento é nulo.

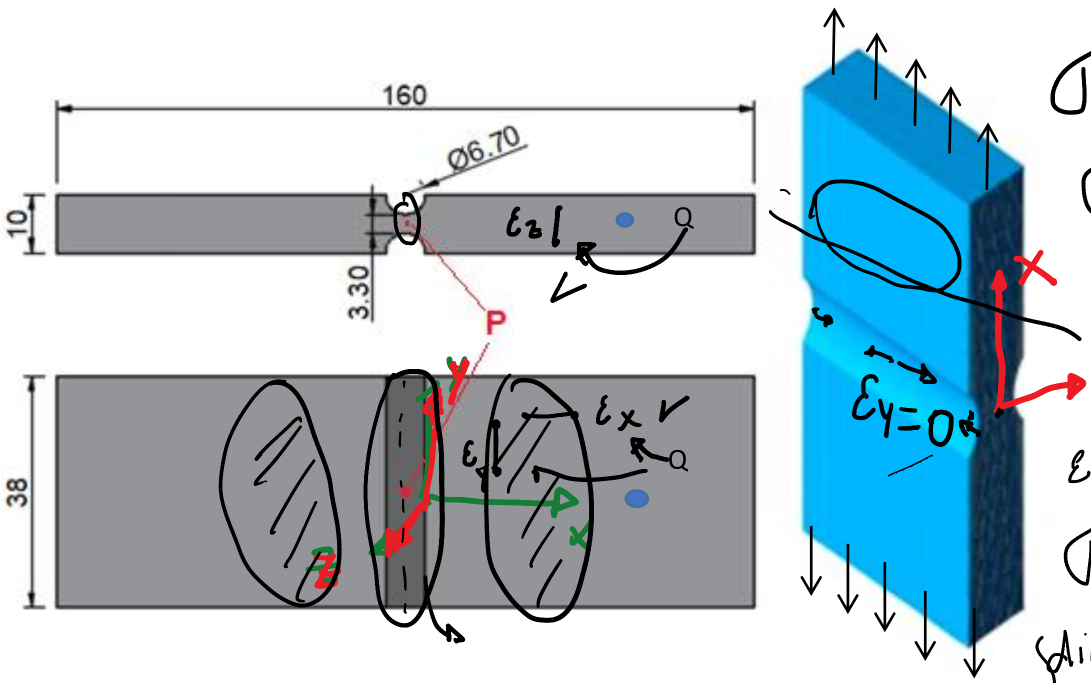
Aplicação da lei de Hooke gera os seguintes valores de tensões e deformações não nulas:

$$\varepsilon_z = \frac{1-\upsilon^2}{E}\sigma_z\,; \qquad \varepsilon_x = -\frac{\upsilon(1+\upsilon)}{E}\sigma_z; \qquad \sigma_y = \upsilon\sigma_z$$





b) O corpo de prova mostrado na figura é utilizado para estudar fratura dúctil. Desenhe o círculo de Mohr para um ponto localizado no centro do entalhe (ponto P) e um ponto longe do entalhe (ponto Q). **Justifique seus desenhos. (0.5)**



$\sigma_x \neq 0$

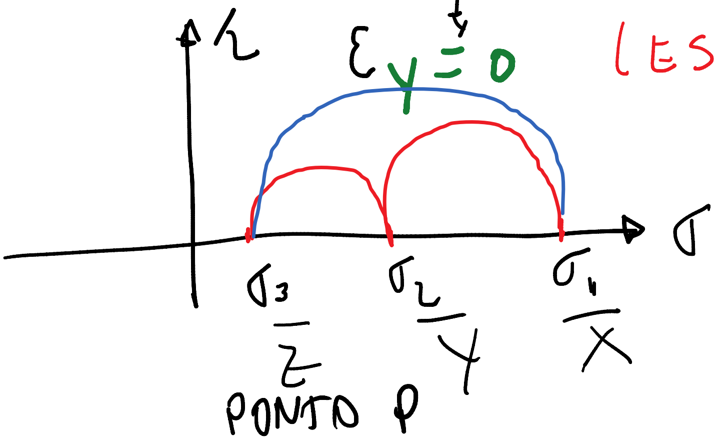
$\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\varepsilon_{ij} \to$ T.E

σ_{ij} FEM

$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_{ij} = 0 \\ \sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} u \end{cases}$

Estado plano de deformação para o ponto P e estado uniaxial para o ponto Q

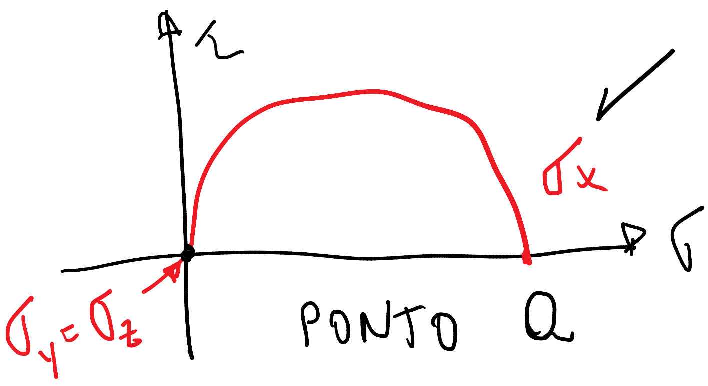


(ESTADO TRIAXIAL)

0,25

2D

3D



(ESTADO UNIAXIAL)

0,25

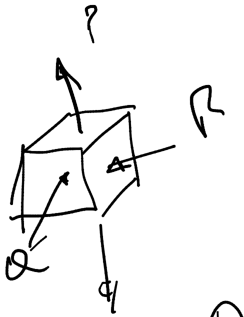
$\varepsilon_x = \sigma_x / E$

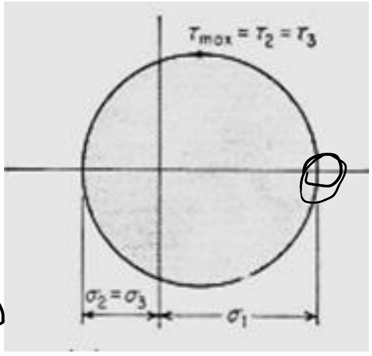
$\varepsilon_y = \nu \varepsilon_x$

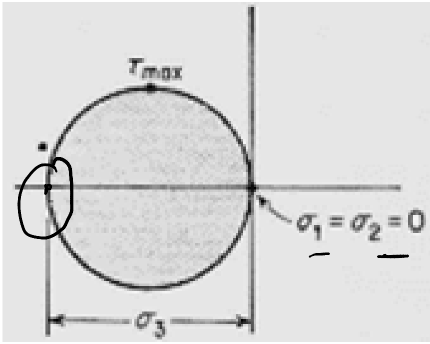
$\varepsilon_z = \nu \varepsilon_x$

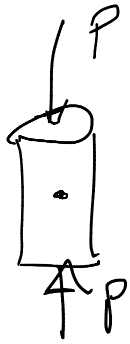
1

c) Identifique os carregamentos aplicados no ponto material que geraram os seguintes círculos de Mohr. **Justifique seus desenhos. (0.5)**









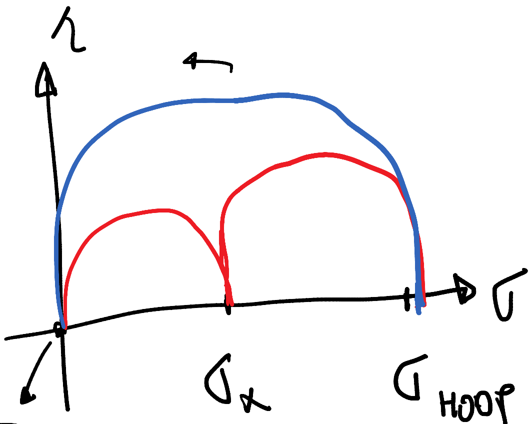
$|Q| = |R| < 0$

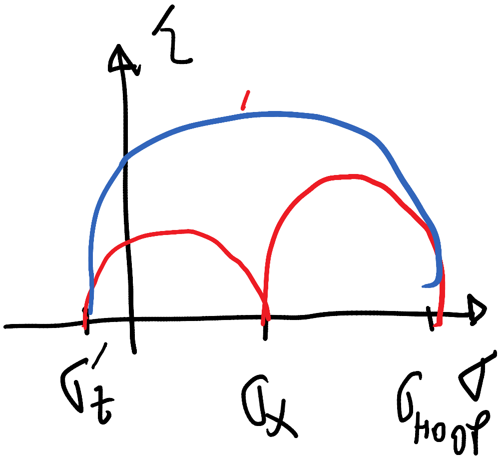
$P > 0$

TRAÇÃO + COMPRESSÃO

COMPRESSÃO UNIAXIAL

d) Represente o estado de tensões para um ponto da superfície externa e interna do cilindro de parede fina submetida à pressão interna p_0. Considerando $D/t \gg 1$, defina os valores das tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3. **Justifique seus desenhos. (0.5)**





$\sigma_t = 0$

SUP. EXT.

0,15

$-p$

SUP. INT.

0,25

Formulário

- Lei de Hooke
  - $\varepsilon_i = \frac{1}{E}[\sigma_i - v(\sigma_j + \sigma_k)]$, $\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$
- Relação de Cauchy
  - $\vec{t}^{(\hat{n})} = \sigma_{ij}\hat{n}$

- Tensões principais para estado plano de tensões:
  - $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- Círculo de Mohr (2D)
  - $C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$, centro.
  - $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$, raio.
- Flexão de vigas
  - $\sigma_{flexão} = \frac{M \times y}{I}$, sendo M o momento fletor, I o momento de inércia e y distancia desde a linha neutra da seção até o ponto e interesse. Momento de inércia de área circular $I = \frac{\pi R^4}{4}$, momento de inércia de seção retangular $I_{zz} = \frac{bh^3}{12}, I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$.
  -
  - $\tau_{flexão} = \frac{V \times \int_{\bar{A}} y dA}{I \times b}$, tensão de cisalhamento, $Q = \int_{\bar{A}} y dA$ é o momento de área, V força cortante, I o momento de inércia da seção e b largura da viga
- Torção de elementos de seção circular
  - $\tau_{torção} = \frac{T \times r}{J}$, $J = \frac{\pi r^4}{2}$ para seções circulares cheias e $J \approx 2\pi R_{med}{}^3 t$ para seções circulares de parede fina.
- Tensões em componentes cilíndricos pressurizados de parede fina:
  - $\sigma_{Longitudinal} = p\frac{r}{2t}$ $\quad \sigma_{Circunferencial} = p\frac{r}{t}$, sendo p a pressão aplicada, r raio externo e t a espessura