

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 24

OBJETIVOS: DISCUTIR CONVOLUÇÃO E INICIAR AS APLICAÇÕES DA TF A EDOs E EDPs.

3.4 CONVOLUÇÃO

SEJAM f E g DUAS FUNÇÕES "QUE ADMITAM TF". PODERÍAMOS PENSAR QUE $f, g \in \mathcal{A}$, POR EXEMPLO. A CONVOLUÇÃO $f * g$ É DEFINIDA COMO

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot g(x - \xi) d\xi.$$

- O CONCEITO SE ESTENDE A OUTRAS TRANSFORMADAS, ONDE O DOMÍNIO DE INTEGRAÇÃO MUDARIA.

- O FATOR $(2\pi)^{-1/2}$ SERIA DESNECESSÁRIO EM OUTRAS CONVENÇÕES DE TF.

- NEM SEMPRE EXISTE.

- SUAS PROPRIEDADES DEPENDEM DA QUELAS DE f E g .

- PODE SER ESTENDIDA A DISTRIBUIÇÕES!

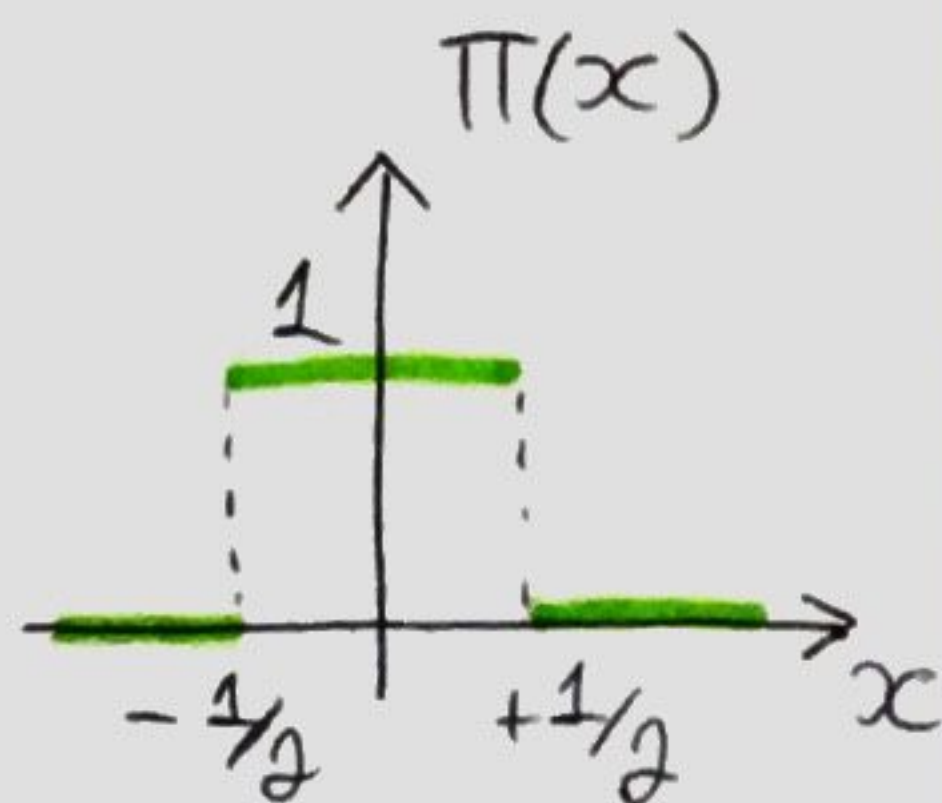
- UMA INTERPRETAÇÃO: UM "SINAL TOTAL" DE MAGNITUDE x É COMPOSTO PELAS POSSÍVEIS SUPERPOSIÇÕES DE PARCELAS, DE MAGNITUDES ξ E $x - \xi$.

INDEPENDENTES!

- OUTRA INTERPRETAÇÃO: UM SINAL "FÍSICO" É "FILTRADO" PELO "APARATO EXPERIMENTAL".

◇ EXEMPLO

$$\text{SE } \Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } |x| < 1/2 \\ 0, & \text{SE } |x| > 1/2 \end{cases}$$



E $\Pi_a(x) \equiv \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right)$, PARA QUALQUER f ,

$$(f * \Pi_a)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cdot \Pi_a(x - \xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a} \underbrace{\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f(\xi) d\xi}_{\text{MÉDIA!}}$$

MÉDIA!

MEDIDA DE f COM RESOLUÇÃO a $\diamond$

TEOREMA DE CONVOLUÇÃO

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f * g)](k) &= \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k) \\ &\stackrel{||}{=} \widetilde{f * g}(k) \end{aligned}$$

□ DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k) e^{-ik(x-\xi)} dk \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(k) e^{-ikx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{ik\xi} d\xi \right] dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{f}(k) \tilde{g}(k)] e^{-ikx} dk = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k) \tilde{g}(k)] \end{aligned}$$

NO ESPAÇO DE FOURIER, EXPRES-
SÕES QUE SÃO O PRODUTO DE
TRANSFORMADAS CONHECIDAS
SÃO INVERTIDAS POR CONVOLU-
ÇÃO!

$$f * g = g * f$$

3.5 APLICAÇÕES A EDOs E EDPs

(i) $u'' - u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(u'' - u) = \mathcal{F}(f) \Rightarrow (-ik)^2 \tilde{u} - \tilde{u} = \tilde{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = -\frac{1}{1+k^2} \cdot \tilde{f}$$

MAS $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2a}{a^2 + k^2}$

$$\in \mathcal{F}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-|x|}}_{= g(x)}\right) = \frac{1}{1+k^2}$$

ASSIM, $\tilde{u}(k) = -\tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \in$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) [-g(x-\xi)] d\xi =$$

AULAS 19-20
p. 07-08

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-|x-\xi|} d\xi.$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER PODEM AFETAR APENAS UMA DAS VARIÁVEIS DE UMA FUNÇÃO DE VÁRIAS VARIÁVEIS.

$$\tilde{u}(k, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{u(x, t)} e^{ikx} dx$$

(ii) EQUAÇÃO DE DIFUSÃO/CALOR 1D

$$u_t - \alpha \cdot u_{xx} = 0 ; \quad u(x, 0) = f(x) ; \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

PERFIL INICIAL
DE TEMPERATURA OU
CONCENTRAÇÃO

$\Downarrow \mathcal{F}_x$

$$\tilde{u}_t = \alpha (-ik)^2 \tilde{u}$$

$$= \underbrace{-\alpha k^2}_{\text{CTE EM } t} \tilde{u}$$

$$\Rightarrow \tilde{u}(k, t) = C(k) e^{-\alpha k^2 t} = \tilde{u}(k, 0) e^{-\alpha k^2 t}$$

$$\text{ORA, } u(x, 0) = f(x) \xRightarrow{\mathcal{F}_x} \tilde{u}(k, 0) = \tilde{f}(k)$$

$$\text{ASSIM, } \tilde{u}(k, t) = \underbrace{\tilde{f}(k) e^{-\alpha k^2 t}}_{\equiv \tilde{g}(k; t)}$$

$$\text{MAS } \mathcal{F}(e^{-x^2/2}) = e^{-k^2/2} \quad \text{E} \quad \mathcal{F}[f(\beta x)] = \frac{1}{|\beta|} \tilde{f}\left(\frac{k}{\beta}\right)$$

IDENTIFICANDO $\beta^{-1} = \sqrt{2\alpha t}$,

$$e^{-\alpha k^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-x^2/4\alpha t}\right] \quad E,$$

POR CONVOLUÇÃO,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-(x-\xi)^2/4\alpha t} \right] d\xi$$

$$\therefore u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} e^{-(x-\xi)^2/4\alpha t} \cdot f(\xi) d\xi$$