

Sequências de números reais

Uma sequência real é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$n \mapsto a_n$$

a_n : n -ésimo termo da sequência

Por exemplo,

$$f(n) = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$S: \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right)$$

Uma sequência é uma lista ordenada ^{infinita} de números.

Notações.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\left(\frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exemplo: ① Progressão Aritmética

é uma sequência tal que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma.

$$(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$$

$$(2, 5, 8, 11, \dots)$$

$$a_n = k + r(n-1), \quad n \in \mathbb{N}$$

Ex. (2) Progressão Geométrica

(2)

é uma sequência cuja razão entre dois termos consecutivos é constante.

(a) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$ PG de razão 3.

$$r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = \dots$$

(b) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$

$$(r = \frac{1}{2})$$

(c) $(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(3) Seqüência de Fibonacci.

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad \forall n \geq 3$$

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$$

(4) $(a_n)_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

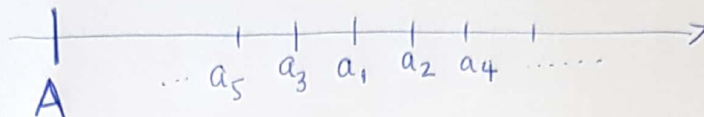
$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 1, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

$$b_n = (0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 1, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2, & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \\ 3, & \text{se } n = 4k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (n = 1 + 4k, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

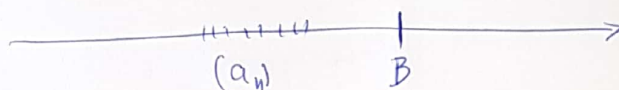
Def. Uma sequência $(a_n)_n$ é limitada inferiormente se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Uma sequência $(a_n)_n$ é limitada superiormente se existir $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n \leq B, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



(a_n) é limitada se existirem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$A \leq a_n \leq B, \quad \forall n.$$