ORDENS

I. Definições básicas:

1. Dizemos que uma relação R em A é uma *relação de ordem* ou que é uma *ordem (parcial)* em A se R é reflexiva, antissimétrica (ou seja, se xRy e yRx , então $x = y$, para todo $x, y \in A$) e transitiva. Neste caso, (A, R) é chamado de conjunto ordenado. Geralmente denotamos ordens por $\leq$.

2. R é uma *ordem estrita* se R é assimétrica (ou seja se aRb implica não acontece bRa) e transitiva (e geralmente a denotaremos por $<$).

3. Sejam $a, b \in A$ e $\leq$ uma ordem em A . Dizemos que a e b são *comparáveis* (na ordem $\leq$ se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Se a e b não são comparáveis, dizemos que são *incomparáveis*.

4. Uma ordem $\leq$ (ou $<$) em A é dita *linear* ou *total* se quaisquer dois elementos de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ é chamado de *conjunto linearmente ordenado*.

5. Seja $\leq$ uma ordem em A e $B \subset A$.

(i) Dizemos que $b \in B$ é o *menor elemento (ou mínimo)* de B na ordem $\leq$ se $b \leq x$ para todo $x \in B$ e que b é um *elemento minimal* de B na ordem $\leq$ se não existe $x \in B$ tal que $x \leq b$ e $x \neq b$. De forma análoga (só invertendo as desigualdades), definimos *maior elemento (ou máximo)* de B e *elemento maximal* de B .

(ii) Dizemos que $a \in A$ é um *limitante (ou cota) inferior* de B se $a \leq x$ para todo $x \in B$ e que $a \in A$ é o *ínfimo* de B (denotado por $\inf B$) se a é o maior elemento do conjunto dos limitantes inferiores de B . De forma análoga pode-se definir *limitante (ou cota) superior* de B e *supremo* de B (denotado por $\sup B$).

II. Exercícios :

1. Mostre que as seguintes relações são exemplos de ordens parciais: $\subseteq$ (em $\mathcal{P}(X)$, X um conjunto qualquer), $n|m$ (em $\mathbb{N} \setminus \{0\}$) e id_A (em um conjunto A).

2. Dê exemplos de elementos comparáveis e incomparáveis nas ordens do exercício 1. Quais delas são totais?

3. (a) Seja R uma ordem em A . Mostre que a relação S definida em A por aSb se e só se aRb e $a \neq b$ é uma ordem estrita em A .

(b) Seja S uma ordem estrita em A . Mostre que a relação R definida em A por aRb se e só se aSb ou $a = b$ é uma ordem em A .

4. Sejam R uma ordem parcial em A e $B \subset A$. Mostre que $R \cap B^2$ é uma ordem parcial em B .

5. Mostre que se R é uma relação de ordem em um conjunto A , então R^{-1} também é.

6. Considere $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$. Ache o maior elemento, o menor elemento, elementos maximais e minimais (se existirem) de B quando:

- (a) $B = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{8\}, \{1, 2, 3, 8, 17\}\}$ (b) $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 (c) $B = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ (d) $B = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$.

7. Considere $\mathbb{N} \setminus 0$ com a ordem $n \leq m$ se e somente se $n|m$.

(a) $\mathbb{N} \setminus 0$ tem menor elemento? Tem maior elemento? Quais são os elementos maximais e minimais (se existirem)?

(b) Responda as mesmas perguntas para $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

8. Seja $A = \mathcal{P}(X)$, onde X é um conjunto não vazio, com a ordem da inclusão, ou seja, $\subset$. Mostre que para todo $S \subset A$, $S \neq \emptyset$, temos:

- (a) $\sup S = \bigcup S$ e
 (b) $\inf S = \bigcap S$.

No próximo exercício vocês usarão vários dos conceitos vistos até agora:

9. Seja $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ definida por $\mathcal{P} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, onde $A_n = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \min X = n\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{P}$ é uma partição de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

(b) Ache a relação de equivalência $E_{\mathcal{P}}$ correspondente. Quem é o conjunto quociente $\mathcal{P}(\mathbb{N})/E_{\mathcal{P}}$?

(c) Defina $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ por $f([X]_{E_{\mathcal{P}}}) = \min X$ (escreveremos simplesmente $[X]$ no lugar de $[X]_{E_{\mathcal{P}}}$). Mostre que f está bem definida, ou seja, que de fato é uma função.

(d) Mostre que f é sobrejetora e injetora.

(e) Ache $f[A]$ onde $A = \{[\mathbb{N}], [\{3, 8\}], [\{5\}]\}$ e $f^{-1}[B]$ onde $B = \{0, 1, 3\}$.

(f) Defina em $\mathcal{P}(\mathbb{N})/E_{\mathcal{P}}$ a ordem $[X] \preceq [Y]$ se e somente se $\min X \leq \min Y$ (onde $\leq$ é a ordem usual em $\mathbb{N}$). Mostre que $\preceq$ está bem definida, ou seja, que não depende da escolha dos representantes e que de fato é uma ordem em $\mathcal{P}(\mathbb{N})/E_{\mathcal{P}}$. Essa ordem é total? Quem são os maiores e menores elementos (se existirem)?