Multiplicadores de Lagrange

Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja

$$B = \{(x, y) \in A; g(x, y) = 0\}$$

onde g é uma função de classe C^1 em A e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em B. Vamos estudar o problema de encontrar extremos de f em B. Suponha que a curva $g(x, y) = 0$ seja dada na forma paramétrica por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$. Sobre esta curva a função f é dada por $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$. Assim para determinarmos os extremos de f sobre B basta encontrarmos os extremos de φ. Sabemos que os extremos da φ, caso exista, deve ocorrer em t_0 tal que $\varphi'(t_0) = 0$. Mas pela regra da cadeia temos

$$\varphi'(t) = \nabla f(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

Agora, substituindo $t = t_0$ e pondo $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$ obtemos

$$\nabla f(P_0).\gamma'(t_0) = 0$$

ou seja, $\gamma'(t_0)$ deve ser ortogonal a $\nabla f(P_0)$. Por outro lado, ∇f é ortogonal as curvas de nível de f. Então, em P_0, as curvas de nível $g(x, y) = 0$ e $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ devem ser tangentes e, portanto, $\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0)$ para algum λ_0.

Teorema

Seja $f(x,y)$ *diferenciável no aberto* A *e seja*

$$B = \{(x,y) \in A;\, g(x,y) = 0\}$$

onde g *é de classe* C^1 *em* A, *e* $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$, *para todo* $(x,y) \in B$. *Uma condição necessária para* $(x_0,y_0) \in B$ *seja extremante local de* f *em* B *é que exista* λ_0 *tal que*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$$

Exemplo

Encontre o ponto sobre o ramo da hipérbole $xy = 1$, $x > 0$ *mais próximo à origem* $(0, 0)$

solução:

A função a ser minimizada é $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sujeito a condição $g(x, y) = 0$ onde $g(x, y) = xy - 1$.

Notemos que se (x, y) é um ponto que satisfaz $g(x, y) = 0$ e minimiza d, então este mesmo ponto minimizará a função $f = d^2$ e, reciprocamente.

Deste modo, temos que encontrar um mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita a condição $g(x, y) = xy - 1 = 0$

Pelo Teorema de multiplicadores de Lagrange, tal ponto deve satisfazer para algum λ

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

o que é equivalente a

$$\begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ xy = 1, \quad x > 0 \end{cases}$$

Temos da primeira e da segunda equação que $2x = \frac{\lambda^2}{2}x$ que implica $4 = \lambda^2$, ou seja, $\lambda = \pm 2$.
Substituindo $\lambda = 2$ no sistema anterior temos $y = x$ e $xy = 1$ o que implica que $(x,y) = (1,1)$ é solução do sistema.
Substituindo $\lambda = -2$ no sistema anterior temos $y = -x$ e $xy = 1$, que implica $-x^2 = 1$ que é absurdo.

Portanto $(1,1)$ é a única solução do sistema.
Mostremos que $(1,1)$ é mínimo de f.
De fato, se $xy = 1$ e $x > 0$

$$f(x,y) - f(1,1) = x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$= \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x^2-1)^2}{x^2} \geq 0$$

isto é, $f(x,y) \geq f(1,1) = 2$ para todo (x,y) no ramo da hiperbole $xy = 1$ e $x > 0$. Note que a distância mínima é $d(1,1) = \sqrt{f(1,1)} = \sqrt{2}$.

Exemplo

Estude com relação a máximos e mínimos a função $f(x,y) = x + y$ *com restrição* $x^2 + y^2 = 1$.

solução: Seja $g(x,y) = x^2 + y^2$. Temos que $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ em $x^2 + y^2 = 1$. Pelo teorema de multiplicadores de Lagrange os candidatos a extremos tem que satisfazer

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

o que é equivalente

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Da primeira e segunda equação vem que $x = y$, substituindo na terceira equação obtemos $2x^2 = 1$, ou seja, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto os candidatos a extremos de f são os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
Temos que $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} > f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$.
Deste modo como o conjunto dos pontos (x, y) que satisfaz $x^2 + y^2 = 1$ é compacto, vem que $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é ponto de máximo e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ é ponto de mínimo de f em $x^2 + y^2 = 1$.