FÍSICA II - 2020

MÓDULO IV - INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE FLUIDOS

AULA 17 – PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES & ALGO MAIS

LEMBRAR: DA ÚLTIMA VEZ

* Equilíbrio hidrostático de um fluido sob forças volumétricas externas além de forças de pressão

3 equações, uma para cada componente dos vetores

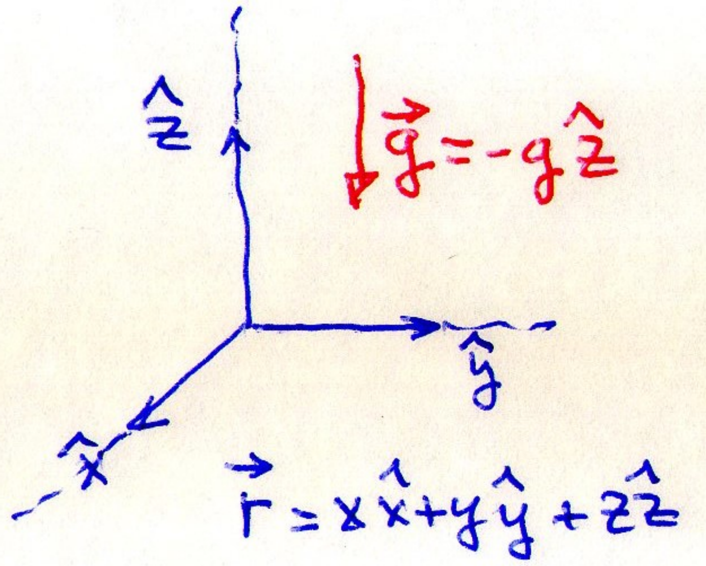
$$\boxed{\text{grad } p(\vec{r}) = \vec{f}_v(\vec{r})} \quad \left(\text{ou } \boxed{\vec{\nabla} p(\vec{r}) = \vec{f}_v(\vec{r})}\right)$$

vetor — gradiente da pressão — escalar

densidade de força volumétrica

* Caso especial: $\vec{f}_v(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})\vec{g}$ $\quad\vec{g}$: aceleração da gravidade

A força volumétrica é o peso do fluido.



Neste caso

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) g \hat{z}$$

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial y} = 0$$

→ a pressão não depende de x ou y

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial z} = -\rho(\vec{r}) g$$

→ a pressão (só) depende de z, e portanto também $\rho(\vec{r}) = \rho(z)$.

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z) g}$$

Esta equação não é uma equação fechada

Faz falta uma relação entre a pressão e a densidade

"Equação de estado"

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)\, g}$$

* Caso tratado anteriormente: $\boxed{\rho = \text{constante}}$
Fluido incompressível, 'a mais simples das 'equações de estado''.

* Outro caso: gás ideal, temperatura uniforme constante (gás ideal isotérmico)

eq. de estado:

$$pV = nRT = nM_m \underbrace{\frac{R}{M_m}}_{r} T \equiv M\,rT \Rightarrow \boxed{p = \rho\, rT}$$

Neste caso: $\rho = \frac{p}{rT} \rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{rT}\, p}$ $\qquad \frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT}\, dz$

integrando de $z = z_0$ até z $\rightarrow$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{rT}(z - z_0)$$

A pressão cai exponencialmente com a altitude z $\leftarrow$ $\boxed{p = p_0\, e^{-\frac{g}{rT}(z - z_0)}}$

Notar:
* $\frac{g}{rT}$ tem dimensões de inverso de um comprimento, L^{-1}.
* $h \equiv \frac{rT}{g} \simeq 8{,}3$ km para um gás ideal com $M_m \simeq 30 \times 10^{-3}$ kg a 300 °K

valores correspondentes à atmosfera da terra (aproximadamente!)

determina a escala do decréscimo exponencial de p com z.

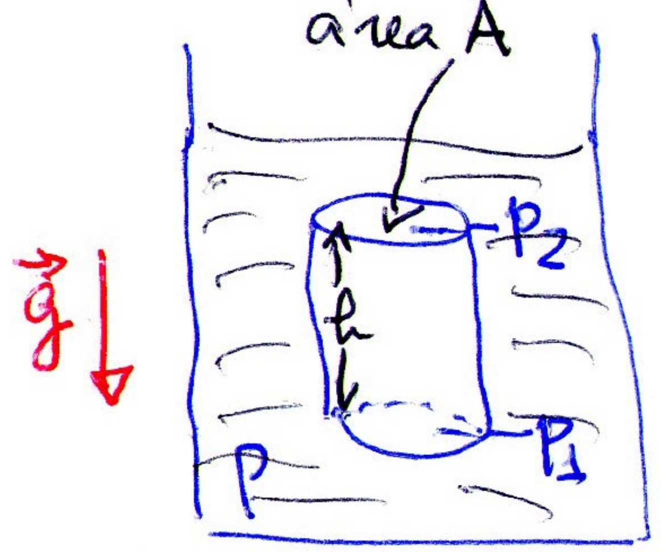
em regime estático!

Outras pequenas proezas das forças de pressão (além do 'paradoxo hidrostático')

É fácil calcular explicitamente as forças de pressão

* Princípio de Arquimedes

1) Caso simplíssimo: cilindro sólido mergulhado em um fluido incompressível sob a ação da gravidade.



Forças sobre o cilindro: a) Seu pêso $-Mg\,\hat{z}$

b) Forças de pressão: sobre o fundo $p_1 A\,\hat{z}$

sobre o topo $-p_2 A\,\hat{z}$

sobre as laterais: resultante nula por simetria.

Mas

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

logo

c) Resultante das forças sôbre o cilindro

peso do cilindro → ← forças de pressão

$$-Mg\,\hat{z} + (p_1 - p_2) A\,\hat{z} =$$

$$= -Mg\,\hat{z} + \underbrace{\rho g h A}_{M_L g}\,\hat{z} = -(M - M_L) g\,\hat{z}$$

Casos: $Mg > M_L g \rightarrow$ o cilindro quer afundar

$Mg < M_L g \rightarrow$ o cilindro quer boiar

↑ "empuxo", pêso do líquido deslocado.

E mais:

Se o cilindro tem densidade uniforme, seu centro de massa (ou de gravidade) coincide com o centro de massa (ou gravidade) do líquido deslocado

Neste caso!

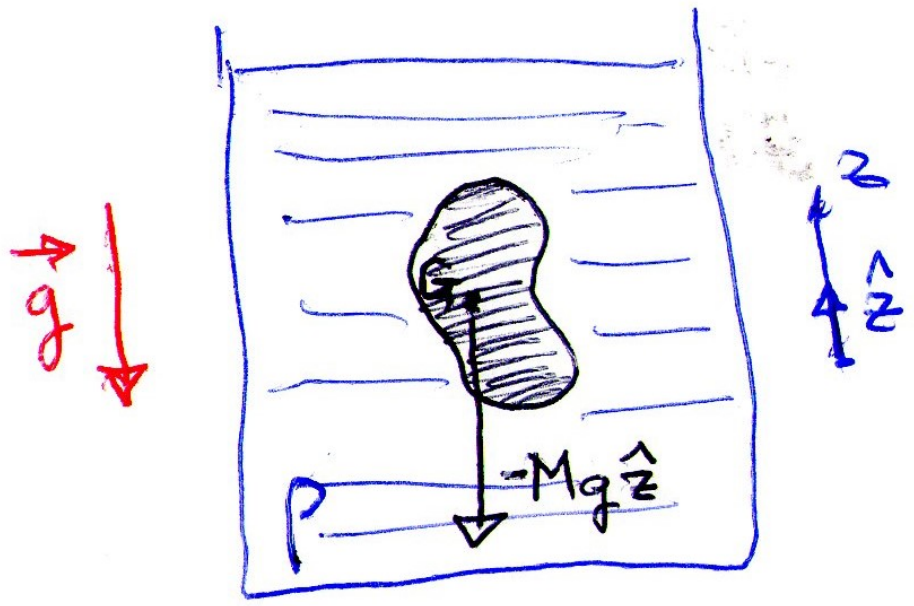
Empuxo como resultante das forças de pressão!

* Princípio de Arquimedes (continuação)

Não é fácil calcular explicitamente as forças de pressão

2) Caso geral: corpo sólido de formato qualquer mergulhado em um fluido incompressível sob a ação da gravidade

Forças sobre o objeto: a) Seu peso $-Mg\hat{z}$, aplicado ao centro de gravidade G

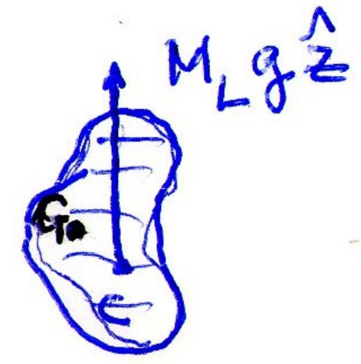


b) Forças de pressão: A substituição do corpo sólido por uma porção de mesma forma de líquido leva a uma situação de equilíbrio

A resultante das forças de pressão deve ser igual ao peso do líquido de substituição, e aplicada ao centro de gravidade do líquido de substituição C

em módulo

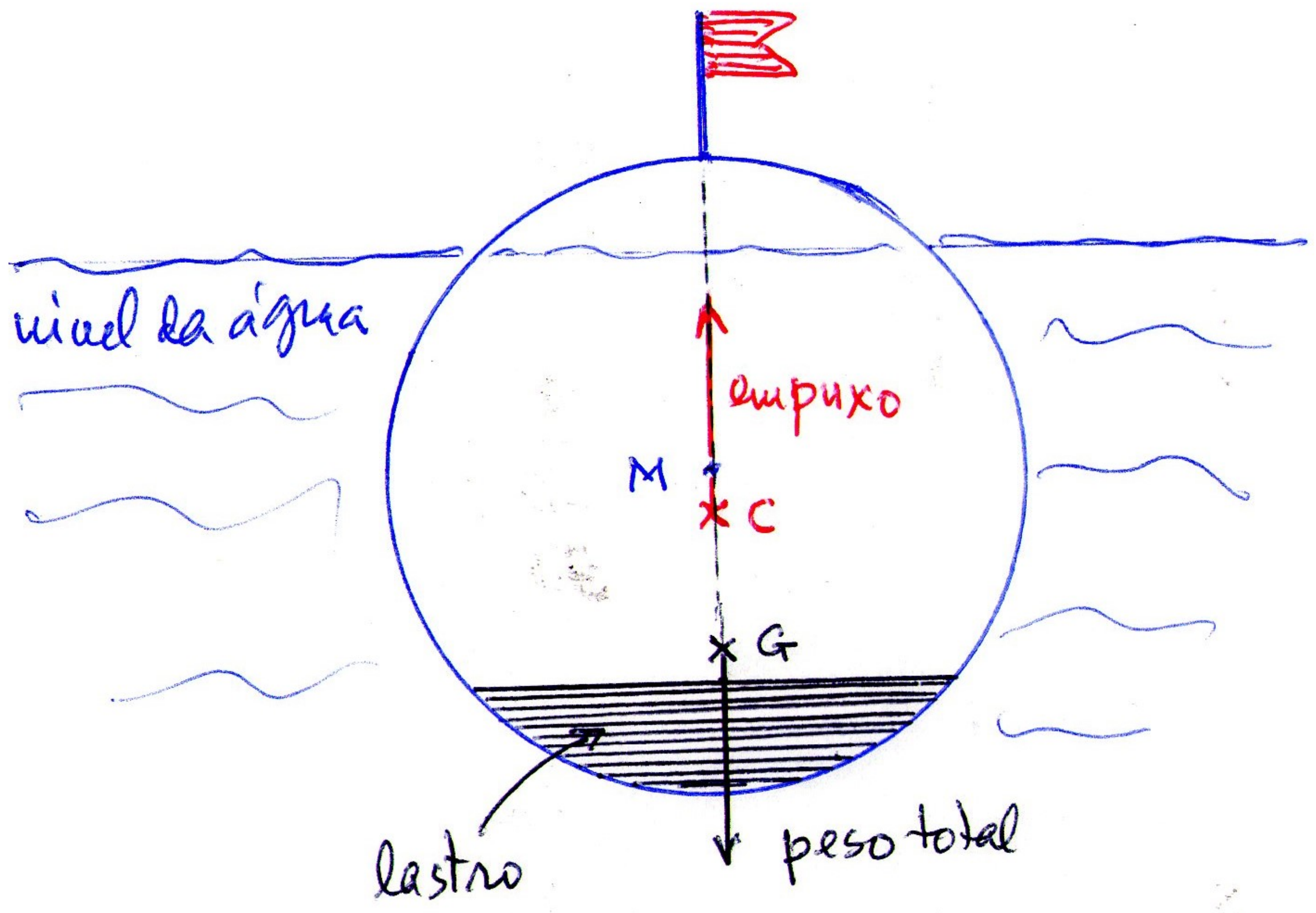
"centro de empuxo"

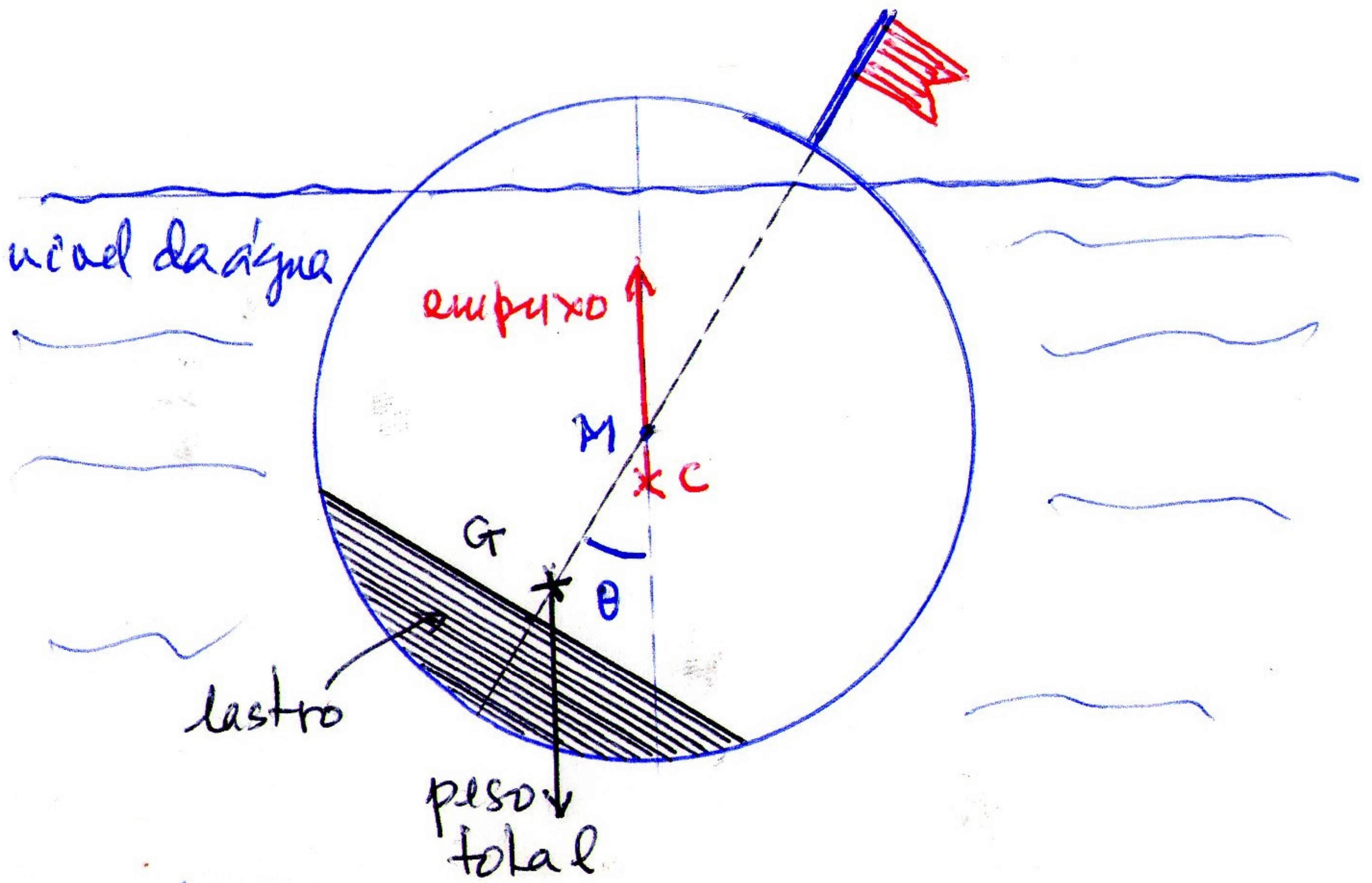


As tendências de movimento dependem não só da resultante das duas forças mas também de um eventual torque, por terem elas diferentes pontos de aplicação

Estabilidade ou não da orientação espacial do corpo sólido imerso no líquido.

EXEMPLO SIMPLES - Estabilidade na 'atitude' de um flutuador esférico





C centro de empuxo
G centro de gravidade
M 'metacentro'

* M está sempre no centro da esfera porque a inclinação (θ) não altera a posição do centro de empuxo (C)

* Estabilidade do equilíbrio com G abaixo de M: o torque resultante da inclinação tende a voltar à posição $\theta = 0$. A 'atitude' com $\theta = \pi$ (lastro para cima) é instável (torque resultante nesse caso!) e G está acima de M

CASO MAIS COMPLICADO (Geometricamente): "Estabilidade inicial" de embarcações

o que se espera de um barco:

1) Que flutue

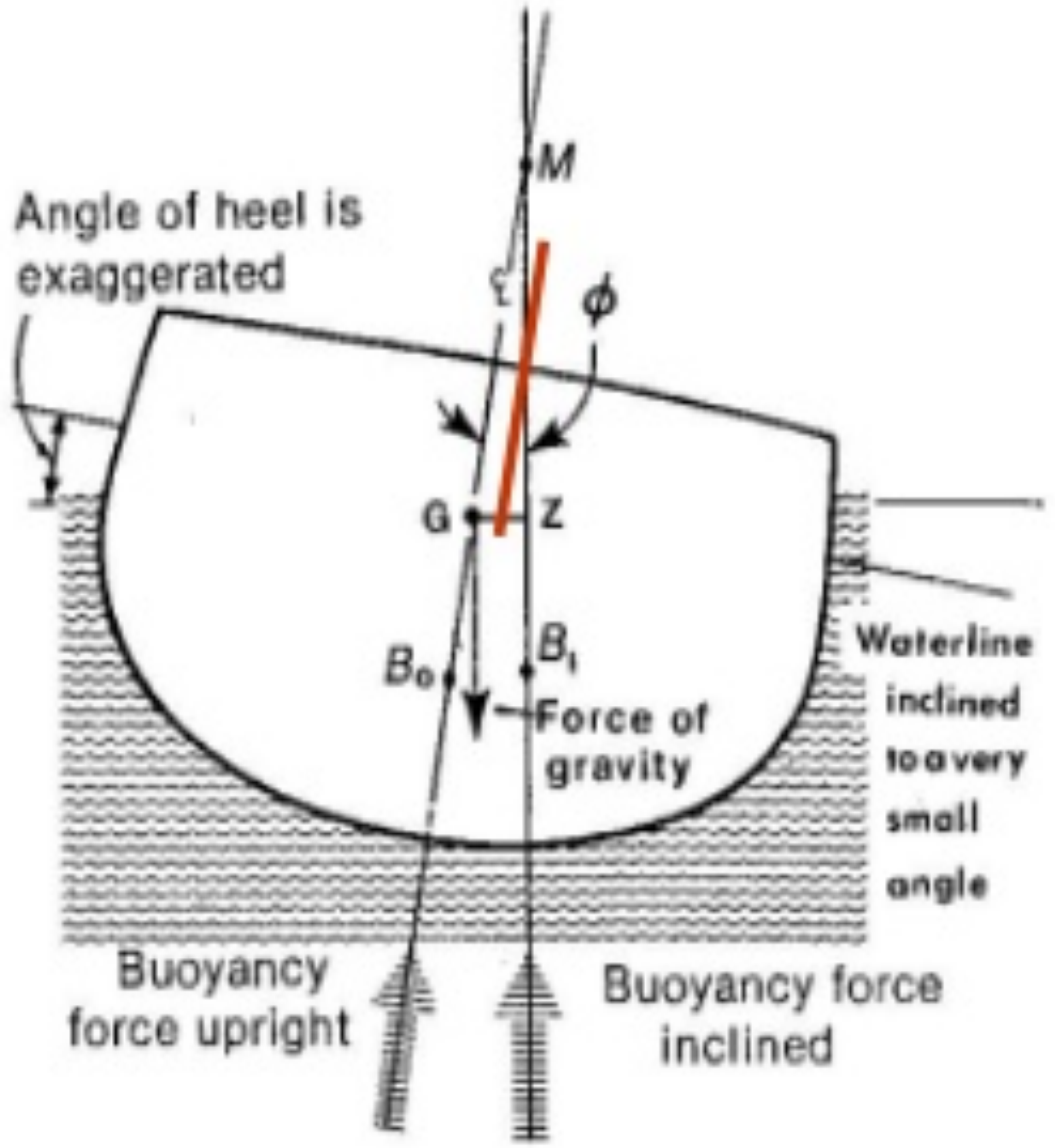
2) Que não vire facilmente ← "estabilidade inicial"

* Ref: http://www.slideshare.net/pcorsano/active-management-of-vessel-stability

Metacenter

- Metacentric Height (GM)
  - Determines size of righting/upsetting arm (for angles < 7º)

    $GZ = GM*\sin\phi$
  - Large GM -> large righting arm (stiff)
  - Small GM -> small righting arm (tender)



LIMIAR DE UM NOVO TÓPICO

CINEMÁTICA DE UM FLUIDO EM MOVIMENTO

meio contínuo!

* Duas estratégias

Lagrange: 'leis horárias' de 'partículas de fluido' identificadas por sua posição inicial:

$$\vec{r}(t; \vec{r}_0, t_0)$$

Euler: 'campo de velocidades': campo vetorial

$$\vec{v}(\vec{r}, t)$$

De uso mais corrente, será usada aqui.

$\vec{r}$ e t indicam um ponto no espaço e um tempo

'campo de densidade: campo escalar

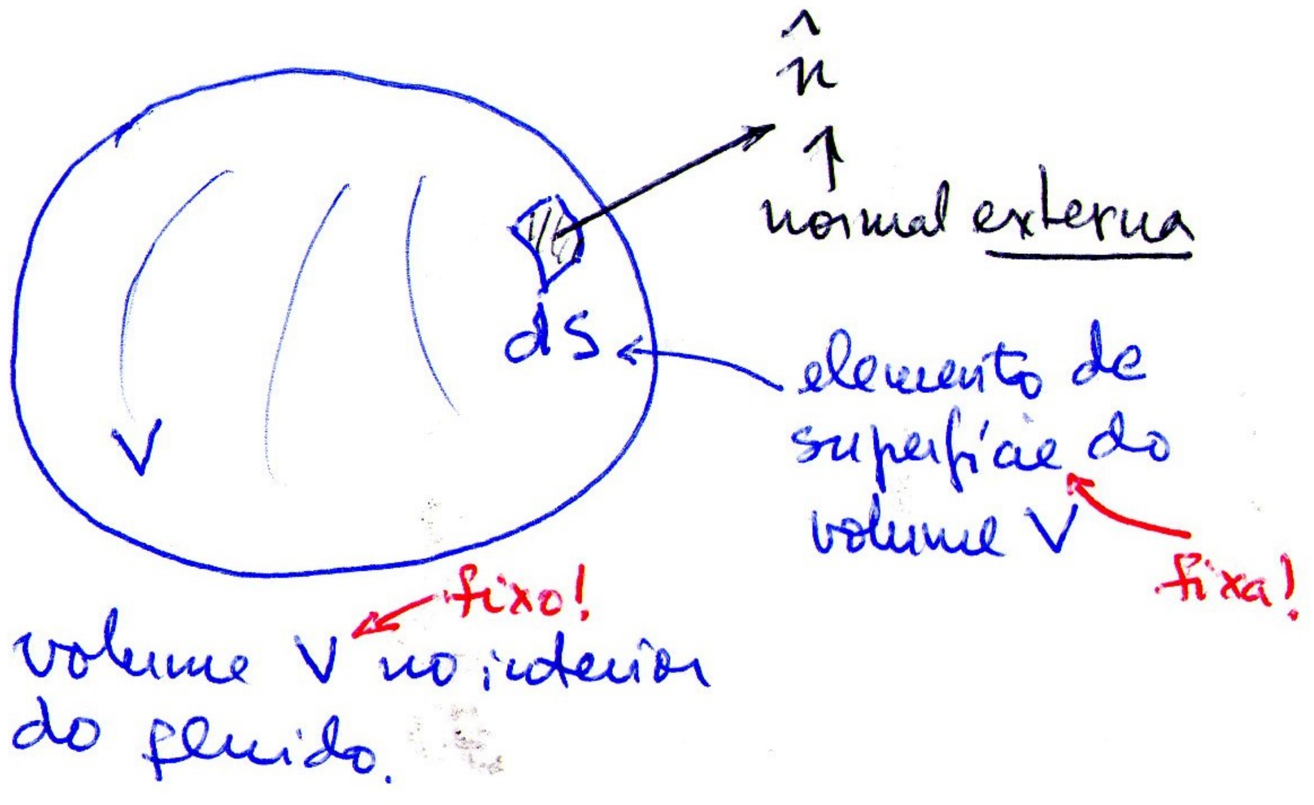
$$\rho(\vec{r}, t)$$

desnecessário no caso de um fluido incompressível

mais simples, dispensa 'equações de estado', etc.

* Na descrição de Euler, $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{v}(\vec{r}, t)$ não são inteiramente independentes: devem satisfazer relações que exprimem a conservação da massa total de fluido.

CONSERVAÇÃO DA MASSA TOTAL DE FLUIDO



* Massa de fluido contida em V no tempo t

$$M(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t)\, dV$$

* Se o fluido está em movimento descrito pelo campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r}, t)$, o fluxo de fluido através de dS no tempo t é

$$d\phi = \rho(\vec{r}, t)\, \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}\, dS$$

posição do elemento de superfície dS

O produto $\rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$ é a densidade de corrente (corrente por unidade de área) no ponto $\vec{r}$

$d\phi > 0$ se o fluxo é para fora do volume V

* A conservação da massa total de fluido implica que a variação de $M(t)$ deve ser igual à massa de fluido que entra ou sai de V. Então, integrando $d\phi$ sobre toda a superfície S do volume V

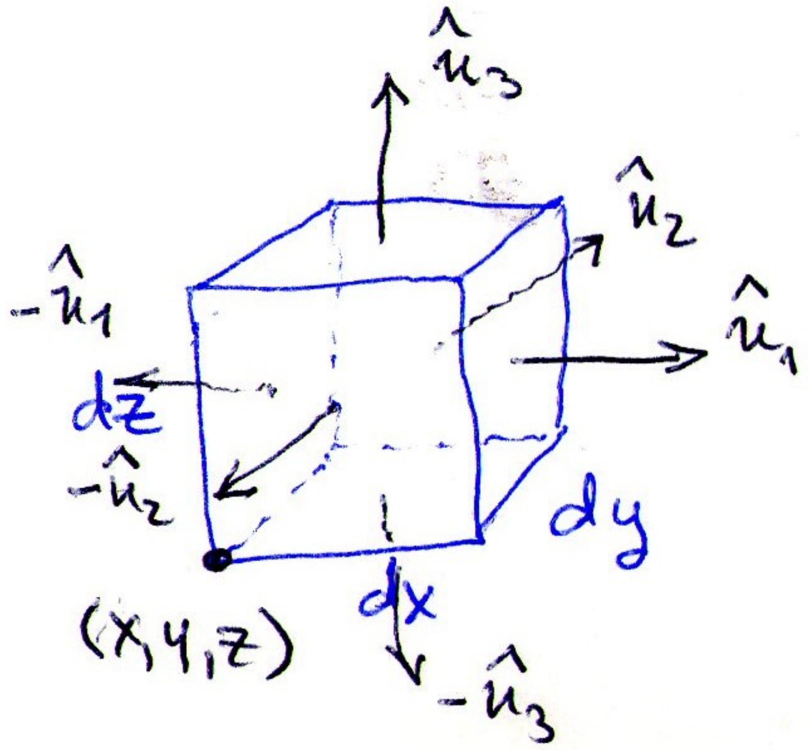
EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE (em forma integral)

$$\boxed{\int_S \rho(\vec{r}, t)\, \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}\, dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t)\, dV}$$

sinal: se $M(t)$ cresce $d\phi < 0$ (fluxo para dentro de V)

* Levando a sério a 'continuidade' do fluido é possível escrever uma versão diferencial ('local') da equação de continuidade. Basta aplicar a forma integral a um elemento infinitesimal de volume em forma de cubo, dxdydz:

Def: $\vec{j}(\vec{r},t) \equiv \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ (densidade de corrente de fluido)



$$\underbrace{[j_x(x+dx,y,z,t) - j_x(x,y,z,t)]}_{dx}\, dy\,dz\,\cancel{dx} \;+$$

$$+\;\underbrace{[j_y(x,y+dy,z,t) - j_y(x,y,z,t)]}_{dy}\, dx\,dz\,\cancel{dy} \;+$$

$$+\;\underbrace{[j_z(x,y,z+dz,t) - j_z(x,y,z,t)]}_{dz}\, dx\,dy\,\cancel{dz} \;=\; -\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,y,z,t)\,\cancel{dx\,dy\,dz}$$

$$\therefore\quad \boxed{\underbrace{\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

versão diferencial (local)

Uma equação de continuidade é sempre sinal de uma lei de conservação.

Outro exemplo: Uma equação de continuidade deduzida da equação de movimento para uma corda tensa (equação de onda em uma dimensão) (Notação: Moysés 2, Seção 5.3)

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} \longrightarrow \underbrace{\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]} = \underbrace{T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}$$

"tensão" da corda, aqui uma força, diferente das 'tensões' da mecânica de fluidos!

então

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right]}_{+\frac{\partial}{\partial x} i} = 0}$$

densidade de energia cinética

densidade de energia potencial

"corrente de energia"

$$\boxed{i = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Equação de continuidade (em versão diferencial)

Exprime a conservação de energia na corda (sem necessidade de médias temporais, etc. Vale localmente para qualquer solução da equação de onda).