

FÍSICA II - 2020

MÓDULO IV - INTRODUÇÃO À MECÂNICA DE FLUIDOS

AULA 16 – NOÇÕES BÁSICAS

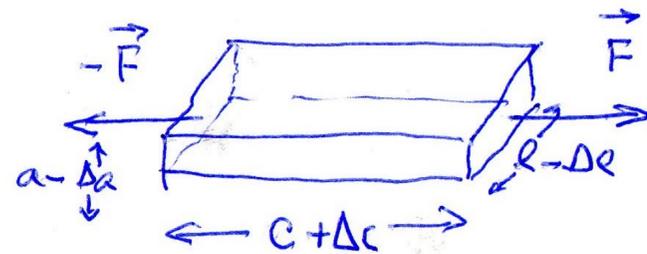
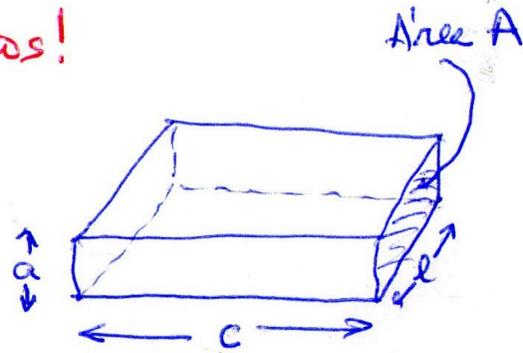
PRÓLOGO - Caracterização de 'não fluidos' X fluidos

Sólidos:
elasticidade

líquidos, gases:
fluides (!)

Contexto: sólidos, líquidos, gases tratados como sistemas contínuos
* 'Modelo matemático', validado empiricamente em uma determinada escala.

Elasticidade de sólidos ^{isotrópicos!}



Se \vec{F} não é 'grande demais':

1) $\Delta c = \frac{|\vec{F}|}{k}$ ← Lei de Hooke
k ← constante

2) Dependência da geometria: para uma dada força \vec{F}

- a) Δc é inversamente proporcional à área A
- b) Δc é proporcional ao comprimento c

$$\Delta c = \frac{|\vec{F}|}{A} \frac{c}{Y}$$

k

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = Y \frac{\Delta c}{c}$$

tensão

deformação

Y não depende do material

Módulo de Young.

Unidade: força/distância²

→ N/m² (Pascal)

3) Nas direções transversas à força: l e a diminuem com o estiramento devido a \vec{F}

$$-\frac{\Delta l}{l} = \nu \frac{\Delta c}{c}$$

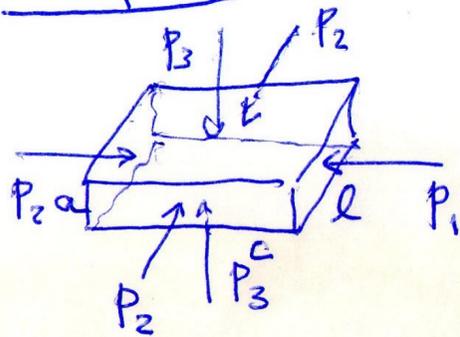
$$-\frac{\Delta a}{a} = \nu \frac{\Delta c}{c}$$

ν só depende do material
↑
coeficiente de Poisson

ν e E caracterizam completamente as propriedades elásticas de sólidos isotrópicos.

* Pequena tabela de valores → segue

Exemplo 1 - Sólido sob pressão uniforme → redução do volume?
↑ força aplicada externamente por unidade de área



- Deformação de c :
- 1) devida a P_1 $(\frac{\Delta c}{c})_1 = -\frac{P}{Y}$
 - 2) devida a P_2 $(\frac{\Delta c}{c})_2 = \nu \frac{P}{Y}$
 - 3) devida a P_3 $(\frac{\Delta c}{c})_3 = \nu \frac{P}{Y}$

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$\frac{\Delta c}{c} = (\frac{\Delta c}{c})_1 + (\frac{\Delta c}{c})_2 + (\frac{\Delta c}{c})_3 = -\frac{P}{Y}(1-2\nu)$$

Analogamente

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{Y}(1-2\nu)$$

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{P}{Y}(1-2\nu)$$

$$\text{Def: } p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

$$\text{Então } \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + O(\Delta^2) = -3 \frac{P}{Y}(1-2\nu)$$

Módulo volumétrico →

$$K = \frac{Y}{3(1-2\nu)}$$

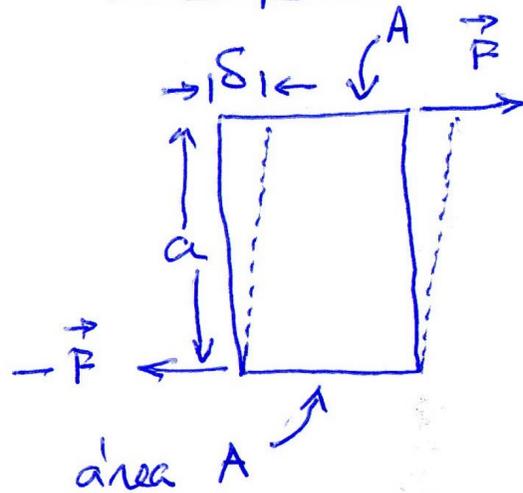
Alguns valores de Y (módulo de Young) e σ (coeficiente de Poisson) ← adimensional!

	Y (em 10^9 N/m^2)	σ
Acrílico	2,3	$\sim 0,4$
Alumínio	99	0,334
Cobre	117	0,355
Tungstênio	~ 400	0,28

GPa, gigapascal
(pressão atmosférica
 $\sim 10^5 \text{ Pa}$)

Limite de "corpo rígido": $Y \rightarrow \infty$

Exemplo 2 - Sólido sob tensão de cisalhamento



$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \mu \frac{\delta}{a}$$

↑ Tensão de cisalhamento

↑ módulo de cisalhamento

↑ deformação de cisalhamento

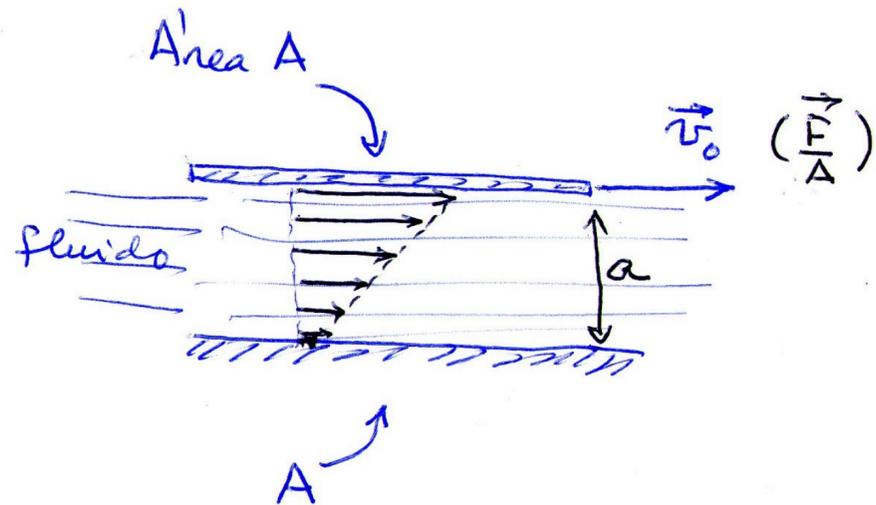
$$\mu = \frac{\gamma}{2(1+\nu)}$$

Dedução mais elaborada que no Exemplo 1. Ver Feynman II, #38-1 e #38-2

Caracterização de 'fluido': meio incapaz de reagir elaticamente a tensões de cisalhamento

↑ sob tais tensões os fluidos fluem!

✳ Como é a reação de um fluido a tensões de cisalhamento?



* A placa superior é arrastada com velocidade \vec{v}_0 (o que exige uma tensão de cisalhamento \vec{F}/A)

* A velocidade do fluido na região de extensão varia linearmente entre v_0 e 0 (em contacto com a base em repouso)

$$\frac{|\vec{F}|}{A} = \eta \frac{v_0}{d}$$

↑
Coeficiente de viscosidade

Fluido ideal: $\eta \rightarrow 0$ (a velocidade é mantida sem realização de trabalho ($\vec{F} \rightarrow 0$))

Fluidos reais ('newtonianos'): $\eta > 0$, comportamento dissipativo do trabalho realizado por \vec{F}

↑
'atrito interno' no fluido

Unidades: $[\eta] = \left[\frac{F}{A} \frac{d}{v_0} \right] = \frac{\text{Newton} \times \text{segundo}}{\text{m}^2} \equiv \text{'poise'}$; $1 \text{ cp} = 10^{-2} \text{ p}$

Alguns valores

Fluido	η
Air	$1,8 \times 10^{-2} \text{ cp}$
Água	$\sim 1 \text{ cp}$
Glicerina	$\sim 800 \text{ cp}$
Pixe	$2 \times 10^{11} \text{ cp}$

(Temperatura \sim ambiente)

Experiência das gotas de Pixe
← Un. de Queensland, Brisbane, Australia



Experiência das gotas de pixe

v. Wikipédia

Universidade de Queensland
Brisbane, Austrália

Início 1927 → continua até hoje

Data	Evento	Intervalo de tempo (anos)
1927	Pixe quente colocado	—
10/1930	<u>Início</u> : funil aberto	—
12/1938	1ª gota	8,1
02/1947	2ª gota	8,2
04/1954	3ª gota	7,2
05/1962	4ª gota	8,1
08/1970	5ª gota	8,3
04/1979	6ª gota	8,7
07/1988	7ª gota	9,2
11/2000	8ª gota	12,3
4/2014	9ª gota	13,4

Troca do C.
da Sala →

DOIS TIPOS DE FORÇAS em MEIOS CONTÍNUOS

1. Forças volumétricas → Agem em cada ponto do meio, a força que age sobre um elemento de volume $dx dy dz$ é proporcional ao elemento de volume.

$$d\vec{F}_v = \vec{f}(x, y, z) dx dy dz$$

↑
"densidade de força volumétrica"

* Exemplo: pêso, no campo gravitacional \vec{g}
 $\vec{f}(x, y, z) = \rho(x, y, z) \vec{g}$; $d\vec{F}_v = \overbrace{\rho(x, y, z) dx dy dz}^{dm} \vec{g}$

* Forças de atrito interno associadas à viscosidade são também forças volumétricas.

↳ também: tensões normais, de cisalhamento, etc.

2. Forças superficiais → Associadas às tensões através das quais uma parte do meio interage com adjacências. A força que age sobre uma superfície dS é proporcional a dS .

$$d\vec{F}_s = -p(\vec{r}, t) dS \hat{n}$$

FLUIDO EM EQUILÍBRIO (ESTÁTICO)

Forças agindo no fluido: * Superficiais: pressões

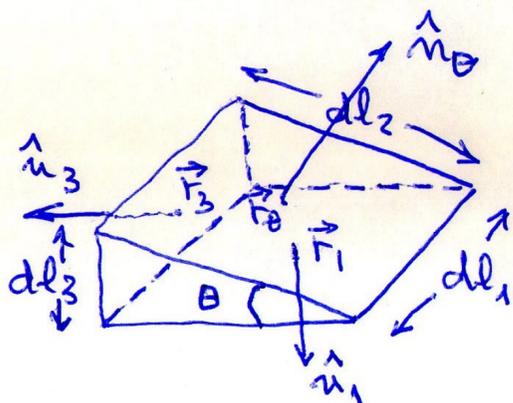
$$d\vec{F}_s = -p(\vec{r}, \hat{n}) \hat{n} ds$$

pressão: valor possivelmente dependente da posição e da direção \hat{n} .

normal (externa) à superfície; fluido não suporta tensões de cisalhamento estaticamente

* Volumeétricas $d\vec{F}_v = \vec{f}_v(\vec{r}) dV$

① A pressão $p(\vec{r}, \hat{n})$ não depende da direção \hat{n} (é a mesma em qualquer direção)



$$\hat{n}_\theta = -\hat{n}_1 \cos\theta - \hat{n}_3 \sin\theta$$

$$d\vec{F}_s^{(1)} = -p(\vec{r}_1, \hat{n}_1) \hat{n}_1 dl_1 dl_2 \cos\theta$$

$$d\vec{F}_s^{(\theta)} = -p(\vec{r}_\theta, \hat{n}_\theta) \hat{n}_\theta dl_1 dl_2$$

$$d\vec{F}_s^{(3)} = -p(\vec{r}_3, \hat{n}_3) \hat{n}_3 dl_1 dl_3$$

$$d\vec{F}_v = \vec{f}_v(\vec{r}) \frac{1}{2} dl_1 dl_2 \cos\theta dl_3$$

$dl_3 = dl_2 \sin\theta$

$$0 = d\vec{F}_s^{(1)} + d\vec{F}_s^{(2)} + d\vec{F}_s^{(3)} + d\vec{F}_v = dl_1 dl_2 \left[(-p(\vec{r}_1, \hat{n}_1) + p(\vec{r}_\theta, \hat{n}_\theta)) \cos\theta \hat{n}_1 + (-p(\vec{r}_3, \hat{n}_3) + p(\vec{r}_\theta, \hat{n}_\theta)) \sin\theta \hat{n}_3 + \frac{1}{2} \vec{f}_v \sin\theta \cos\theta dl_2 \right]$$

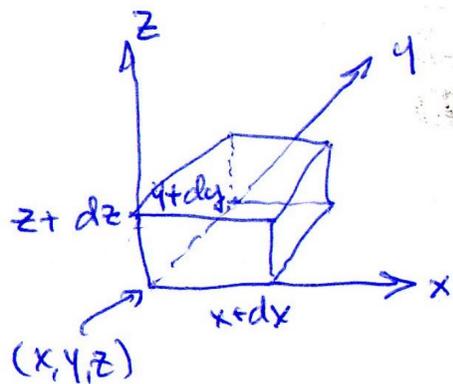
equilíbrio

ordem superior $\rightarrow 0$

No limite $dl_1 \rightarrow 0$, $dl_2 \rightarrow 0$ e $dl_3 \rightarrow 0$, $\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 \rightarrow \vec{r} \\ \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r} \\ \vec{r}_3 \rightarrow \vec{r} \end{array} \right\}$ e $p(\vec{r}, \hat{u}_1) = p(\vec{r}, \hat{u}_2)$
 $p(\vec{r}, \hat{u}_3) = p(\vec{r}, \hat{u}_0)$

\downarrow
vale para qqr θ .
q.e.d.

② Obs - Forças volumétricas dão contribuições $O(dv)$ e não afetam o resultado. Mas afetam a dependência de $p(\vec{r})$ com a posição:



$$d\vec{F}_v = \vec{f}_v(x, y, z) dx dy dz = (f_x \hat{x} + f_y \hat{y} + f_z \hat{z}) dx dy dz$$

Equilíbrio, e.g. na direção x

$$0 = \left\{ f_x(x, y, z) - \underbrace{\left[\frac{-p(x, y, z) + p(x + dx, y, z)}{dx} \right]}_{\frac{\partial p}{\partial x}} \right\} dx dy dz$$

Logo $\boxed{f_x(x, y, z) = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x}}$ \rightarrow relações análogas nas direções y e z

$$\vec{f}_v(x, y, z) = \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{f}_v(\vec{r}) = \text{grad } p(\vec{r})}$$

Feynman II, # 40-1

"We will let you entertain yourself by proving that if there is no shear (tensão de cisalhamento) on any plane in a fluid the pressure must be the same in any direction."

"The pressure in a fluid may vary from place to place" (...)

"If we take a small cube of water, what is the net force on it from the pressure? (...) we easily see that the pressure force per unit volume is $-\vec{\nabla} p$."

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

or $\vec{\nabla} \cdot \equiv \text{grad} \cdot$

SUMÁRIO

1) Densidade de força volumétrica: $\vec{f}_v(\vec{r})$

2) Densidade de força de pressão: $-\text{grad } p(\vec{r})$



Equilíbrio estático: $\vec{f}_v(\vec{r}) - \text{grad } p(\vec{r}) = 0$

↑
pressão (escalar)

Obs. Para forças volumétricas conservativas, $\vec{f}_v(\vec{r}) = -\text{grad } u(\vec{r})$

↑
densidade de
energia potencial

Nesse caso,

$$\text{grad } (u(\vec{r}) + p(\vec{r})) = 0$$



$$u(\vec{r}) + p(\vec{r}) = \text{constante}$$

← superfícies equipoten-
ciais são também
superfícies isobáricas

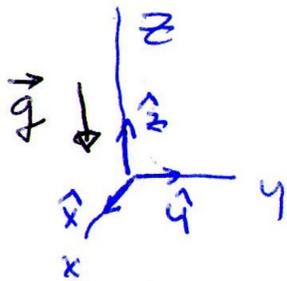
Exemplo planetário: 'esfericidade' da superfície dos oceanos.



Caso muito particular, mas de ocorrência cotidiana

* Fluido incompressível ($\rho = \text{constante}$) sob ação da gravidade (na escala 'de laboratório')

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g}$$



$$u(\vec{r}) = \rho g z$$

$$-\text{grad } u(\vec{r}) = -\rho g \hat{z}$$

(\vec{g} constante)

EQUILÍBRIO:

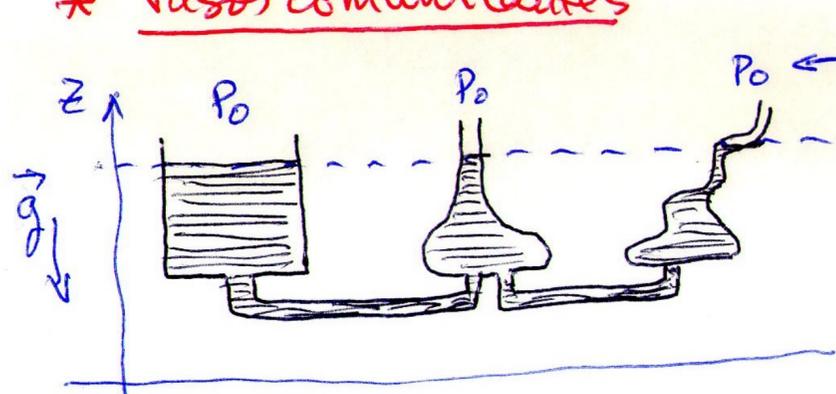
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$



$$p(z) - p(z_0) = -\rho g (z - z_0)$$

A diferença de pressão entre dois pontos só depende da diferença de nível entre eles.

* 'Vasos comunicados'



Uso: e.g. 'níveis de água'

* 'Mecanismo hidráulico'

pressão atmosférica

força aplicada área a



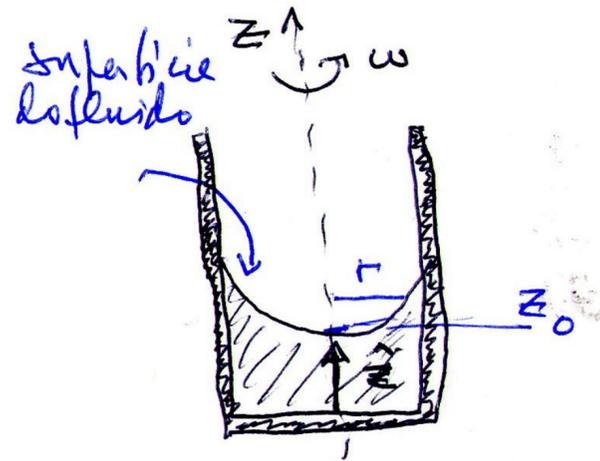
força aplicada área A

Equilíbrio:

$$\frac{F_1}{a} = \frac{F_2}{A} \Rightarrow F_1 = \frac{a}{A} F_2$$

Um caso com forças volumétricas inerciais (conservativas!)

* Fluido incompressível em rotação em recipiente cilíndrico, velocidade angular ω
 (o fluido está em repouso, em equilíbrio no referencial girante)



Forças volumétricas no referencial girante

1) $\vec{f}_g = -\rho g \hat{z} = -\text{grad } \rho g z$

$u_g = \rho g z$

2) $\vec{f}_\omega = \rho \omega^2 r \hat{r} = -\text{grad } \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$

$u_\omega = -\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$

↑
 verso radial

No equilíbrio

$p + u_g + u_\omega = \text{constante}_1$

↓
 na superfície livre do fluido $p = p_0 = \text{constante}_2$

Até, portanto, $u_g + u_\omega = \text{constante}_1 - p_0 = \text{constante}_3$

$\rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = \text{constante}_3$

→ na superfície livre e
 no eixo de rotação

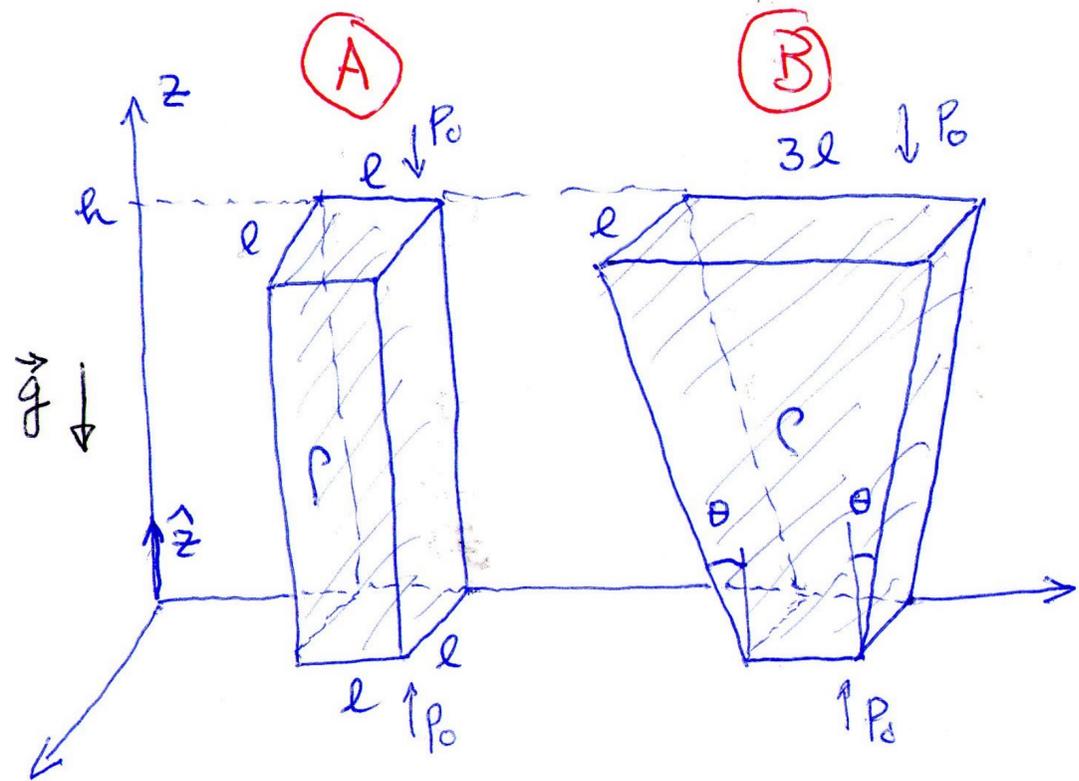
$\text{constante}_3 = \rho g z_0$

Forma parabólica
 da superfície livre

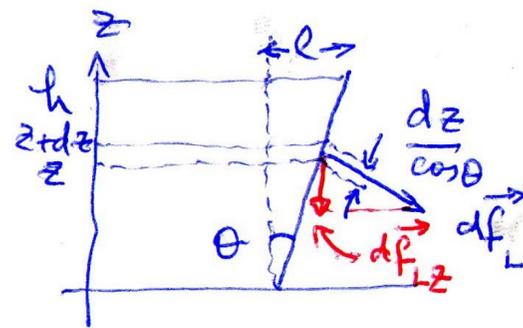
$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$



"PARADOXO HIDROSTÁTICO" - Exemplo trabalhado quantitativamente



Chave: Em **(B)** (mas não em **(A)**) as forças de pressão exercidas sobre as paredes inclinadas têm componentes verticais não nulas.



área lateral

$$dF_{Lz} = -p(z) \frac{l dz \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \rho g (h-z) \frac{l^2 dz}{h}$$

$$\tan \theta = \frac{l}{h}$$

Pressão sobre o fundo: **(A)** } $P_0 + \rho g h - P_0$
(B) }

Força sobre o fundo: **(A)** } $-\rho g l^2 h \hat{z}$
(B) }

Peso: **(A)** $\rho g l^2 h$

(B) $2\rho g l^2 h$

↑ volume duplo!

vamos deixá-lo(a) se enteder provando que as contribuições da pressão atmosférica se cancelam sempre

Integrando de 0 a h em z

$$F_{Lz} = -\rho g \int_0^h \left(l^2 - \frac{z l^2}{h} \right) dz =$$

$$= -\frac{1}{2} \rho g l^2 h$$

* Como há duas dessas partes inclinadas a resultante vertical das forças de pressão é o peso adicional de **(B)**