Aula 7 – Integrais trigonométricas

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Objetivo da aula:

Discutir algumas estratégias para calcular algumas integrais envolvendo funções trigonométricas usando a Regra da Substituição.

Exemplo 1

Calcule $\displaystyle\int \cos^3 x dx$.

Exemplo 2

Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx.$

Estratégia para calcular $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$, para m ímpar.

1. Escreva $m = 2k + 1$.
2. Temos
   $\int \operatorname{sen}^n x \cos^{2k+1} x dx = \int \operatorname{sen}^n x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx$.
3. Use a Regra da Substituição para $u = \operatorname{sen} x$.
4. Calcule $\int u^n (1 - u^2)^k du$.
5. Não esqueça de substituir u por $\operatorname{sen} x$ no final (ou mudar os extremos de integração, se for integral definida).

Estratégia para calcular $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx$, para n ímpar.

1. Escreva $n = 2k + 1$.
2. Temos $\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^m x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m \operatorname{sen} x dx$.
3. Use a Regra da Substituição para $u = \cos x$.
4. Calcule $-\int (1 - u^2)^k u^m du$.
5. Não esqueça de substituir u por $\cos x$ no final (ou mudar os extremos de integração, se for integral definida).

Exemplo 3

Calcule $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx.$

Exemplo 4

Calcule $\int \cos^2 x dx$.

Estratégia para calcular $\int \operatorname{sen}^{2n} x \cos^{2m} x dx$.

1. Use as igualdades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.
2. Obtemos
$$\int \operatorname{sen}^{2n} x \cos^{2m} x dx = \frac{1}{2^{m+n}} \int (1 - \cos 2x)^n (1 + \cos 2x)^m.$$
3. Reduzimos a várias integrais da forma $\cos^j 2x$.
4. Se j for ímpar, usamos a Regra da Substituição para $u = 2x$ e usamos a primeira estratégia.
5. Se j for par, repetimos o item 1 para escrevermos a expressão em função de $\cos 4x$ e continuamos o processo.
6. Também podemos fazer a transformação $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$.

Exemplo 5

Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x dx$.

Estratégia para calcular $\int \text{tg}^n x \sec^m x dx$

- Utilize as seguintes igualdades:
- $\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$;
- $(\text{tg } x)' = \sec^2 x$;
- $(\sec x)' = \sec x \,\text{tg } x$.

Cálculo de $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx$, com $m \geq 2$ par.

1. Escreva $m = 2k$.
2. Use a igualdade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.
3. "Guarde" um fator $\sec^2 x$.
4. Temos $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx = \int \operatorname{tg}^n x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx$.
5. Use a regra da substituição para $u = \operatorname{tg}\ x$.

Cálculo de $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx$, com n ímpar e $m \geq 1$.

1. Escreva $n = 2k + 1$.
2. Use a igualdade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.
3. "Guarde" um fator $\sec x$ $\operatorname{tg} x$.
4. Temos
$$\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx = \int (\sec^2 x - 1)^k x \sec^{m-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx.$$
5. Use a regra da substituição para $u = \sec x$.

Observação 1

Não esqueça que as funções tg *e* $\sec$ *não estão definidas quando* $\cos x = 0$. *Antes de calcular uma integral definida, verifique se a* **integral é imprópria**.

Exemplo 6

Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x dx$.

Fim