

Lista 2 – Álgebra Linear (LOB 1037) – Profa. Paula

1) A seguir, são definidas no conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ duas operações: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$. Para cada caso, verifique se o conjunto é um espaço vetorial. Se a resposta for afirmativa, prove que são satisfeitas todas as propriedades de adição ($\mathcal{A}$) e multiplicação por escalar ($\mathcal{M}$). Se a resposta for negativa, indique qual (is) propriedade(s) não é (são) válida(s).

- a) $\mathcal{A}: (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 $\mathcal{M}: \alpha(x, y) = (\alpha x, y)$
- b) $\mathcal{A}: (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
 $\mathcal{M}: \alpha(x, y) = (-\alpha x, -\alpha y)$
- c) $\mathcal{A}: (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, -x_1 - x_2)$
 $\mathcal{M}: \alpha(x, y) = (3\alpha x, -\alpha y)$

2) Considere $M(n, n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais, de acordo com as operações de soma e produto por escalar. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M(n, n)$? Se for SEV, prove; caso contrário, justifique.

- a) S é o subconjunto das matrizes não inversíveis: $S = \{A \in M; \nexists A^{-1}\}$.
- b) S é o subconjunto das matrizes que comutam com uma matriz fixa (constante) C ,
 $C \in M: S = \{A \in M; AC = CA\}$.
- c) S é o subconjunto das matrizes antissimétricas: $S = \{A \in M; A^T = -A\}$.
- d) $S = \{A \in M; A \text{ é uma matriz diagonal}\}$.

3) Considere $P(x)$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes constantes na variável x , de acordo com as operações usuais. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $P(x)$? Se for SEV, prove; caso contrário, justifique:

- a) $S = \{p(x) \in P(x); \text{grau } P(x) < n\}$
- b) $S = \{p(x) \in P(x); \text{grau } P(x) > n\}$
- c) O conjunto de todos os polinômios que tem π como raiz: $S = \{p(x) \in P(x); p(\pi) = 0\}$

4) Sejam $E = \{(2x, x); x \in \mathbb{R}\}$ e $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. E é em SEV do $\mathbb{R}^2$? F é um SEV do $\mathbb{R}^2$?

5) Seja $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = k\}$, em que $k \in \mathbb{R}$ é fixo. Para quais valores de k , S_k é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Qual a interpretação geométrica da resposta?

6) Determine os subespaços gerados pelos conjuntos a seguir. Verifique quais conjuntos são linearmente independentes e quais são linearmente dependentes.

- a) $E = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^3$
- b) $E = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^3$
- c) $E = \{1, x, x^2\} \in P_2(x)$

- d) $E = \{x^2 - 1, x + 1, x^2 - x, x^2 + x\} \in P_2(x)$
- e) $E = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\} \in \mathcal{C}(-\infty, \infty)$ (EV das funções contínuas de uma variável)
- f) $E = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\} \in \mathcal{C}(-\infty, \infty)$
- g) $E = \{\sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x\} \in \mathcal{C}(-\infty, \infty)$
- 7) Seja S o subespaço gerado pelo conjunto $B = \{(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (2, 1, -1, 0, 1)\}$ no $\mathbb{R}^5$. B é um conjunto LI do $\mathbb{R}^5$?
- 8) Seja S o subespaço gerado pelo conjunto $B = \{x^3, x^3 - x^2, x^3 + x^2, x^3 - 1\}$ em $P_3(x)$. B é um conjunto LI de $P_3(x)$? Encontre um subconjunto $E \subset B$, LI, tal que $S = G(E)$.
- 9) Seja S o subespaço gerado pelo conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ em $M(2,2)$. B é um conjunto LI de $M(2,2)$? Determine S .
- 10) O conjunto $B = \{x^3 + x, x^2 + 1\}$ é LI em $P_3(x)$? Se sim, B é uma base de $P_3(x)$? Qual é o subespaço gerado por B ?
- 11) Determine se o vetor $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 3 \in P_3(x)$ também pertence ao subespaço gerado pelos vetores $B = \{1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$. Se sim, escreva $p(x)$ como CL dos vetores B . B é uma base de $P_3(x)$?
- 12) Seja (a, b) um vetor em $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas de (a, b) nas bases a seguir. Represente graficamente os vetores obtidos.
- a) $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- b) $B_2 = \{(1, 0), (0, 2)\}$
- c) $B_3 = \{(1, 1), (-1, 2)\}$
- 13) Determine a dimensão do subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por
- $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + z = 0, x + y + 2z = 0, 2x + y + z = 0\}$$
- 14) Determine uma base para cada um dos subespaços a seguir:
- a) Matrizes simétricas de ordem 3.
- b) Matrizes antissimétricas de ordem 3.
- 15) Prove que os vetores $\{1, x - 1, (x - 1)^2\}$ formam uma base do $P_2(x)$ e encontre as coordenadas do vetor $2x^2 - 5x + 6$ nessa base.
- 16) Das funções a seguir, determine quais são transformações lineares e quais não. Se for, prove; se não for, justifique.
- a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (1 + x, y)$
- b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x^2, y)$
- c) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y, z) = (x + y + z + 1)$

d) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = (xy, y, x)$

e) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = (1, -1)$

17) Determine a TL $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 1) = (2, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 3)$. Encontre $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 0)$.

18) Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma TL definida por $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 0, 0) = (3, 4)$ e $T(1, 1, 0) = (2, 3)$.

a) Determine $T(x, y, z)$.

b) Determine $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}_1) = (-3, -2)$ e $T(\vec{v}_2) = (0, 0)$.

19) Determine a TL $T: P_2(x) \rightarrow P_2(x)$ tal que $T(1) = x$; $T(x) = -x^2 + 1$; $T(x^2) = 2x^2 + x$.

20) Abaixo são apresentadas TLs. Determine, para cada uma, o núcleo e a imagem. T é injetora? T é sobrejetora? Justifique.

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$.

c) $T: P_1(t) \rightarrow \mathbb{R}^3, T(at + b) = (a, 2a, a - b)$.

d) $T: M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$.

21) Seja a TL $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

a) Determine $T(x, y)$.

b) Determine $N(T)$ e $Im(T)$.

c) T é injetora? T é sobrejetora?

22) Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a TL tal que $T(\vec{e}_1) = (1, -2, 1)$, $T(\vec{e}_2) = (-1, 0, -1)$, $T(\vec{e}_3) = (0, -1, 2)$ e $T(\vec{e}_4) = (1, -3, 1)$, sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$.

a) Determine $N(T)$ e $Im(T)$.

b) Determine bases para o núcleo e a imagem.

c) Verifique o Teorema da Dimensão.

Nos Exercícios (23) a (25), verifique se $T(\cdot)$ é um isomorfismo. Em caso negativo, justifique.

23) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x - 2y, y)$.

24) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, T(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z)$.

25) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y, z) = x + y + z$.

Nos Exercícios (26) a (28), se possível, determine o isomorfismo inverso $T^{-1}(\cdot)$.

26) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$.

27) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, x - y, 2x - y - z)$.

- 28) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2(x), T(a, b, c) = (a - b) + (c - a)x + (b + c)x^2$.
- 29) Determine um isomorfismo $T(x, y)$ entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.
- 30) Determine um isomorfismo $T(x, y)$ entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o subespaço do $\mathbb{R}^3$ dado por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\}$.
- 31) Os pontos $A(2, -1)$ e $B(-1, 4)$ são vértices consecutivos de um quadrado. Utilizando o conceito de matriz de rotação, justifique quantos vértices podem ser determinados a partir de A e B . Calcule-os.
- 32) Determine a matriz do OL de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que representa: (1) uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em sentido anti-horário; (2) uma contração na direção Oy de fator $\frac{1}{3}$; e (3) inversão dos sentidos.

RESPOSTAS

- 1) a) Não é EV, pois falha o axioma M2.
b) Não é EV, pois falham os axiomas A1, A2, A3, M2, M3 e M4.
c) Não é EV, pois falham os axiomas A1, A3, M1, M2, M3 e M4.
- 2) a) É SEV.
b) É SEV.
c) É SEV.
d) É SEV.
- 3) a) É SEV.
b) Não é SEV.
c) É SEV.
- 4) E e F são SEVs.
- 5) $k = 0$. Plano que passa pela origem.
- 6) a) LD.
b) LI.
c) LI.
d) LD.
e) LI.
- 7) B é LD.
- *8) B é LD.
- 9) B é LI. $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M(2,2); a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.
- *10) B é LI. Não é base.
- 11) $p(x) \in S; S = G(B)$ e $p(x) = -1p_1 + 2p_2 - 4p_3$. B não é base de $P_3(x)$, ($\dim(V) < n$, $n \dots n^{\circ}$ elementos de B).
- *13) $\dim(S) = 1$.
- 15) Coordenadas: $a = 3; b = -1; c = 2$.
- 16) (a) ... (e) Não é TL.
- 17) $T(x, y, z) = (-y + 3z, -y + 3z); T(1,0,0) = (0,0); T(0,1,0) = (-1, -1)$.
- 18) a) $T(x, y, z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$.
b) $\vec{v}_1 = (1, y_1, 6 - y_1); \vec{v}_2 = (0, y_2, -y_2)$.
- 19) $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1) + (a_0 + a_2)x + (2a_2 - a_1)x^2$.
- 20) a) $N(T) = \{\vec{0}\}, \dim(N(T)) = 0; Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; 2a - 2b - c = 0\}, \dim(Im(T)) = 2$.
b) $N(T) = \{x(1, -3, 5); x \in \mathbb{R}\}, \dim(N(T)) = 1; Im(T) = \mathbb{R}^2, \dim(Im(T)) = 2$.
c) $N(T) = \{\vec{0}\}, \dim(N(T)) = 0; Im(T) = \{(x, 2x, z); x, z \in \mathbb{R}\}, \dim(Im(T)) = 2$.
d) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}, \dim(N(T)) = 2; Im(T) = \mathbb{R}^2, \dim(Im(T)) = 2$.
- 22) a) $N(T) = \left\{ t \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1 \right); t \in \mathbb{R} \right\}; Im(T) = \mathbb{R}^3$.
b) $B_1 = \{(-6, -2, 0, 4)\}$ é base de $N(T); B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $Im(T)$.
- 23) Sim.
- 24) Não; não é sobrejetora.
- 25) Não; não é injetora.
- 26) $T^{-1}(x, y, z) = (x + 3y + 14z, y + 4z, z)$.
- 27) $T^{-1}(x, y, z) = (x, x - y, x + y - z)$.
- 28) $T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 + a_2, -(a_0 + a_1 - a_2), a_0 + a_1 + a_2)$.
- 29) $T(x, y) = (x, y, 0)$
- 30) $T(x, y) = (x - 2y, x, y)$, para a base canônica do $\mathbb{R}^2$.
- 31) 4 vértices possíveis, se a rotação for de $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ em torno de A ou $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ em torno de B :
 $C_1(-6, 1); D_1(-3, -4)$ e $C_2(7, 2); D_2(4, 7)$.
- 32) $[T]_{1-2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.